Zakres materiału obowiązującego

na pisemnym egzaminie dyplomowym

na Uniwersytecie Wrocławskim

na kierunku matematyka

w roku akademickim 2001/02

INFORMACJA O PISEMNYCH EGZAMINACH DYPLOMOWYCH NA KIERUNKU MATEMATYKA

Zgodnie z uchwałą Rady Wydziału Matematyki i Informatyki z czerwca 2001, egzaminy magisterskie na kierunku "*matematyka*", począwszy od roku akademickiego 2001/2002, składać się będą z części pisemnej i części ustnej. Wynik końcowy egzaminu magisterskiego otrzymuje się uwzględniając wynik części pisemnej z wagą $\frac{3}{4}$ i części ustnej z wagą $\frac{1}{4}$. Część ustna egzaminu dotyczyć będzie pracy magisterskiej i przeprowadzana przez 3 osobowe komisje, polegać będzie na krótkiej (około 10 min.) prezentacji pracy przez egzaminowanego oraz na odpowiedzi na pytania zadane przez komisję w związku z prezentacją. Komisja Egzaminów Dyplomowych w składzie: G. Karch, K. Omiljanowski, K. Tabisz, K. Topolski, R. Szekli (przewodniczący), J. Świątkowski, J. Wróblewski ustaliła następujące zasady przeprowadzenia pisemnych egzaminów dyplomowych na rok akademicki 2001/2002.

- Pisemny egzamin magisterski składa się z 2 części.

  Część pierwsza odbędzie się dnia: I termin- 19 czerwca, II termin- 16 września w formie 2 godzinnego testu i po 30 minutowej przerwie, 2 godzinnego rozwiązywania zadań otwartych. Zakres tej części, obejmujący bazowe wiadomości z algebry, analizy i rachunku prawdopodobieństwa, podany jest szczegółowo na stronach 4-18.

  Część druga odbędzie się dnia: I termin- 20 czerwca, II termin-17 września w formie 2 godzinnego egzaminu (rozwiązywanie zadań). Zakres tej części, obejmujący bazowe wiadomości z poszczególnych specjalności, podany jest na stronach 19-40.

- Zgodnie z paragrafem 50, p.1 Regulaminu Studiów, do egzaminu przystępują studenci, którzy zaliczyli wszystkie przedmioty obowiązkowe i uzyskali wymaganą liczbę punktów kredytowych zgodnie z programem studiów oraz uzyskali ocenę pozytywną z pracy magisterskiej.

Termin składania prac magisterskich w roku 2001/2002 upływa z końcem semestru letniego, t.j. dnia 11 czerwca. Termin ten można przesunąc jedynie z powodu długotrwałej choroby lub z powodu niemożności wykonania pracy z przyczyn niezależnych od studenta. W celu przesunięcia terminu złożenia pracy student lub opiekun pracy składa wniosek u dziekana.

- Dla studentów, którzy nie zdali egzaminu magisterskiego lub do niego nie przystąpili, terminy poprawkowe będą wyznaczane w kolejnych sesjach. Niezdanie egzaminu dyplomowego w ciągu roku od ukończenia studiów powoduje konieczność wznowienia studiów i powtórzenia ostatniego roku studiów w celu uzyskania dyplomu magisterskiego.

- Część pierwsza egzaminu jest jednocześnie egzaminem licencjackim i mogą do niej przystępować studenci, którzy zaliczyli bezwarunkowo 6 semestrów. Po uzyskaniu odpowiedniej liczby punktów, studenci będą zwolnieni ze zdawania tej części egzaminu po ukończeniu 5 roku.

Zakres egzaminu dyplomowego (część I).
Analiza.

0. Opanowany materiał szkoły średniej: postęp arytmetyczny i geometryczny, wartość bezwzględna - równania i nierówności, część całkowita i ułamkowa, równania i nierówności kwadratowe, twierdzenie Bézout, funkcje potęgowe, wykładnicze i logarytmiczne, szkicowanie wykresów, rozwiązywanie równań i nierówności wykładniczych i logarytmicznych.

1. Indukcja matematyczna, dwumian Newtona.

Pojęcia, fakty: zasada indukcji matematycznej; dwumian Newtona.
Umiejętności: umiejętność przeprowadzania prostych rozumowań indukcyjnych; rozumienie sytuacji, w których indukcja rozpoczyna się od $n > 1$ lub krok indukcyjny "skacze" o więcej niż 1; umiejętność posługiwania się dwumianem Newtona.
Przykładowe zadania:

1. Dowieść, że dla wszystkich n naturalnych zachodzi równość

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \ .$$

2. Dowieść, że dla wszystkich n naturalnych zachodzi nierówność $100n < 2^n + 577$.

3. Obliczyć $\sum\limits_{k=0}^{n} 3^k \binom{n}{k}$.

2. Liczby wymierne i niewymierne.

Pojęcia, fakty: gęstość liczb wymiernych i niewymiernych; rozwinięcie dziesiętne liczb rzeczywistych.
Umiejętności: znajomość dowodów niewymierności pierwiastków i logarytmów, umiejętność dowodzenia niewymierności prostych wyrażeń zawierających liczby niewymierne, zamiana liczb wymiernych z postaci ułamka zwykłego na ułamek dziesiętny i na odwrót.

Przykładowe zadania:

4. Dowieść, że liczba $\sqrt{3}+\sqrt{6}$ jest niewymierna.

5. Dowieść, że liczba $\log_2 3$ jest niewymierna.

6. Zamienić na ułamek zwykły liczbę $\sqrt{0,(4)}+\sqrt[3]{3,374(9)}$.

3. Ciągi liczbowe, zbieżność.

Pojęcia, fakty: granica ciągu, ciągi monotoniczne, ograniczone, zbieżność, podciąg, warunek Cauchy'ego.

Umiejętności: umiejętność obliczania granic z użyciem wzorów na granice sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu, twierdzenia o trzech ciągach.

Przykładowe zadania:

Rozstrzygnąć zbieżność ciągu i obliczyć granicę, jeśli jest zbieżny

7. $\sqrt{n^2+n}-n$ **8.** $\frac{n^2+1}{n^3+1}+\frac{n^2+2}{n^3+2}+\frac{n^2+3}{n^3+3}+\ldots+\frac{n^2+n}{n^3+n}$

4. Szeregi liczbowe, kryteria zbieżności, liczba e.

Pojęcia, fakty: szereg liczbowy, zbieżność szeregu liczbowego, kryteria zbieżności, liczba e.

Umiejętności: znajomość podstawowych przykładów szeregów zbieżnych i rozbieżnych (szereg harmoniczny, szeregi geometryczne); znajomośc i umiejętność stosowania do rozstrzygania zbieżności szeregów podstawowych kryteriów zbieżności: warunek konieczny zbieżności, kryterium porównawcze, d'Alemberta, Cauchy'ego, o zbieżności bezwzględnej, Leibniza o szeregach naprzemiennych; podstawowe wiadomości o liczbie e.

Przykładowe zadania:

Rozstrzygnąć, czy następujące szeregi są zbieżne

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ **10.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n-1}$ **12.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^4}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^3}{2^n}$

14. Obliczyć granicę $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{5}{n})^n$.

5. Funkcje.

Pojęcia, fakty: granica funkcji, ciągłość, twierdzenie Weierstrassa, własność Darboux.

Umiejętności: znajomość podstawowych pojęć dotyczących funkcji: dziedzina, granica, ciągłość, monotoniczność, ograniczoność, (nie)parzystość, okresowość; umiejętność obliczania granicy funkcji w punkcie, wyznaczania punktów ciągłości i punktów nieciągłości funkcji; znajomość sformułowania i rozumienie twierdzenia Weierstrassa i własności Darboux.

Przykładowe zadania:

Obliczyć następujące granice:

15. $\lim_{x\to 7}(\frac{1}{x-7}-\frac{8}{x^2-6x-7})$ **16.** $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$

Wyznaczyć dziedzinę oraz punkty ciągłości i nieciągłości funkcji f, jeśli $f(x)$ dane jest wzorem:

17. $\mathrm{sgn}(\sin x)$ **18.** $\{x\}-(\{x\})^2$

19. Dowieść, że równanie $x^x=5$ ma co najmniej jedno rozwiązanie.

6. Pochodna funkcji.

Pojęcia, fakty: pochodna funkcji, twierdzenie Rolle'a, twierdzenie Lagrange'a, reguła de l'Hospitala, zastosowania pochodnych.

Umiejętności: znajomość definicji i interpretacji pochodnej funkcji w punkcie; umiejętność obliczania pochodnej prostych funkcji z definicji oraz wyznaczania punktów różniczkowalności i nieróżniczkowalności funkcji; znajomość pochodnych podstawowych funkcji; znajomość i umiejętność stosowania wzorów na oblicznie pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu, złożenia, potęgi, znajomość i rozumienie sformułowania twierdzeń Rolle'a i Lagrange'a, znajomość i umiejętność zastosowania reguły de l'Hospitala do obliczania granic funkcji, znajomość i umiejętność posługowania się pojęciami: pochodne jednostronne, pochodne wyższych rzędów, wypukłość funkcji, punkt przegięcia, asymptoty; znajomość warunków koniecznych i dostatecznych na ekstrema, umiejętność znajdowania najmniejszej i największej wartości funkcji ciągłej na przedziale domkniętym przu pomocy rachunku różniczkowego (także przykłady, w których funkcja ma punkty nieróżniczkowalności).

Przykładowe zadania:

20. Niech $f(x)=x^5$. Korzystając **z definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na $f'(x)$.

Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji określonej podanym wzorem w podanym przedziale

21. $|x^2-1|+3x$, $[-2,2]$

22. $\ln x-\frac{x}{10}$, $[1,e^3]$

23. Niech $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1} & \text{dla} \quad x\neq 0 \\ A & \text{dla} \quad x=0 \end{cases}$.

Dla którego A istnieje $f'(0)$ i ile jest równa?

7. Szeregi potęgowe, wzór Taylora.

Pojęcia, fakty: szereg potęgowy, promień i przedział zbieżności szeregu potęgowego, wzór Taylora.

Umiejętności: umiejętność wyznaczania przedziału zbieżności; znajomość wzoru Taylora i rozwinięć w szereg potęgowy podstawowych funkcji; umiejętność stosowania wzoru Taylora do obliczeń przybliżonych.

Przykładowe zadania:

Wyznaczyć przedziały zbieżności następujących szeregów potęgowych

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+7}x^{6n}}{\sqrt{n}}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty}10^{n^2}x^{n^3}$

Obliczyć przybliżone wartości następujących liczb korzystając z trzech wyrazów (zerowego, pierwszego i drugiego) odpowiednio dobranego szeregu Taylora. Oszacować błąd przybliżenia.

26. $\sqrt{24}$ **27.** $\sin\frac{1}{10}$

8. Całka nieoznaczona.

Pojęcia, fakty: funkcja pierwotna, całkowanie przez części i przez podstawienie, ułamki proste.

Umiejętności: obliczanie całek z wykorzystaniem podstawowych metod: całkowanie przez części, przez podstawienie, całkowanie funkcji wymiernych.

Przykładowe zadania:

Obliczyć $\int f(x)dx$, jeśli $f(x)$ dana jest wzorem:

28. $x\sin 2x$ **29.** $e^{5x}\cos 3x$

30. $\sin\sqrt{x}$ **31.** $\dfrac{5x^2-12}{(x^2-6x+13)^2}$

9. Całka oznaczona.

Pojęcia, fakty: całka oznaczona, podziały przedziału.

Umiejętności: umiejętność obliczania całki prostych funkcji z definicji, zastosowanie do obliczania pól figur płaskich.

Przykładowe zadania:

Obliczyć całki

32. $\int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$ **33.** $\int_0^{6\pi} |\sin x|dx$

34. Obliczyć pole figury ograniczonej parabolą o równaniu $y=x^2$ i prostą $y=x+2$.

10. Całki niewłaściwe.

Pojęcia, fakty: całka niewłaściwa, zbieżność i rozbieżność całek niewłaściwych, kryterium porównawcze, zbieżność bezwzględna całek niewłaściwych, kryterium całkowe zbieżności szeregów.

Umiejętności: umiejętność rozstrzygania zbieżności oraz obliczania prostych całek zbieżnych, rozumienie kryterium całkowego, rozumienie podobieństw i różnic między całkami niewłaściwymi i szeregami liczbowymi.

Przykładowe zadania:

Zbadać zbieżność całek niewłaściwych

35. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2+\sin^2 x}$

36. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x^4}{x^3} dx$

11. Funkcje wielu zmiennych.

Pojęcia, fakty: funkcje wielu zmiennych, granica i ciągłość, pochodna cząstkowa, gradient, punkty krytyczne, ekstrema warunkowe.

Umiejętności: umiejętność rozstrzygania ciągłości i istnienia granicy w prostych przypadkach, umiejętność obliczania pochodnych cząstkowych, wyznaczania ekstremów warunkowych w prostych przypadkach (okrąg na płaszczyźnie lub w przestrzeni, sfera).

Przykładowe zadania:

37. Rozstrzygnąć istnienie granicy $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$. Jeśli granica istnieje, wyznaczyć jej wartość.

Zbadać ciągłość funkcji dwóch zmiennych - określić, w których punktach funkcje są ciągłe, a w których nieciągłe

38. $f(x,y) = \begin{cases} x^2 - y^2 & \text{dla} \quad x \geqslant y \\ x - y & \text{dla} \quad x < y \end{cases}$

39. $f(x,y) = \begin{cases} |x| & \text{dla} \quad y > x^2 \\ x & \text{dla} \quad y = x^2 \\ y & \text{dla} \quad y < x^2 \end{cases}$

40. Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe rzędu 1 funkcji $f(x,y,z) = x^7 y^9 + z e^{xy}$.

Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji na zbiorze zdefiniowanym podanymi warunkami

41. $f(x,y)=x+y$, $9x^2+4y^2=36$

42. $f(x,y,z)=x-y+z$, $x^2+y^2+z^2=1$

43. $f(x,y,z)=x^2+y^2+xy+z^2$, $x^2+y^2+z^2=1$ i $x+y+z=1$

12. Całki wielokrotne.

Pojęcia, fakty: całki wielokrotne, twierdzenie o równości całek iterowanych, zmiana zmiennych całkowania, współrzędne biegunowe.

Umiejętności: umiejętność obliczania całek wielokrotnych, także z zastosowaniem współrzędnych biegunowych, zastosowanie całek wielokrotnych do obliczania pól i objętości.

Przykładowe zadania:

Dokonać zmiany kolejności całkowania. Obliczyć obydwie całki i porównać wyniki

44. $\int_2^3 \int_0^{\sqrt{y}} x^3 dxdy$ **45.** $\int_1^2 \int_1^y xydxdy$

46. Obliczyć we współrzędnych biegunowych całkę

$$\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} |x+y| dydx.$$

Algebra.

1. Grupy.

Pojęcia, fakty: własności działań w grupie, podgrupy, homomorfizmy (izomorfizmy) grup, warstwy, dzielnik normalny, grupa ilorazowa

Umiejętności: umiejętność ilustrowania abstrakcyjnych definicji przykładami: grupy liczbowe (tzn. $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},\cdot)$), grupy permutacji, grupa pierwiastków z jedności.

Przykładowe zadania:

1. Czy zbiór liczb niewymiernych z dodawaniem tworzy grupę?

2. Udowodnić, że grupa, której każdy element spełnia równanie $a^2 = e$ jest abelowa.

3. Wykazać, że zbiór permutacji S_3 jest izomorficzny z grupą izometrii trójkąta równobocznego.

4. Które z następujących permutacji zbioru $\{1,2,3,4\}$ są parzyste:
a) $(1,2,4,3)$, b) $(4,3,2,1)$, c) $(2,1,4,3)$.

5. Sprawdzić, czy dana funkcja jest homomorfizmem grup:
a) $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(z) = |z|$; b) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(a) = 5a$.

2. Pierścienie.

Pojęcia, fakty: pierścienie $\mathbb{Z}_m$ i $\mathbb{Z}[\sqrt{a}]$, ideały, pierścień ilorazowy, pierścień wielomianów, stopnie wielomianów i pierwiastki wielomianów, nieprzywiedlność wielomianów, twierdzenie Bézouta, wzory Viety.

Umiejętności: Umiejętność rozłożenia nad $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$. $\mathbb{R}$ konkretnego wielomianu małego stopnia. Znajdowanie NWD przy pomocy algorytmu Euklidesa.

Przykładowe zadania:

6. Które z poniższych zbiorów z działaniami są pierścieniami. Czy są to pierścienie przemienne i czy mają jedynkę?
a) Zbiór wszystkich funkcji ciągłych z przedziału $[0,1]$ w zbiór liczb rzeczywistych z działaniami dodawania i mnożenia funkcji.
b) Zbiór wszystkich ciągów nieskończonych o wyrazach rzeczywistych z dodawaniem i mnożeniem ciągów.
c) $\mathbb{Z}_n$ z dodawaniem i mnożeniem modulo n.

7. Dowieść, że pierścień liczb całkowitych Gaussa $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ jest pierścieniem euklidesowym względem normy $N(a+bi) = a^2 + b^2$.

8. Korzystając z algorytmu Euklidesa w pierścieniu $\mathbb{Z}$ obliczyć $NWD(5166,2499)$, a następnie liczbę $NWD(5166,2499)$ przedstawić w postaci $5166x+2499y$, gdzie $x,y\in\mathbb{Z}$.

9. Dane są wielomiany $f,g\in\mathbb{Q}[x]$: $f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2$, $g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$. Znaleźć takie wielomiany $p,q\in\mathbb{Q}[x]$, że $fp+gq=NWD(f,g)$.

3. Ciała.

Pojęcia, fakty: ciało liczb zespolonych, ciała proste, rozszerzenia ciał - elementy algebraiczne.

Umiejętności: znajomość przykładów ciał; konstrukcja liczb zespolonych, interpretacja geometryczna liczb zespolonych, postać trygonometryczna liczby zespolonej.

Przykładowe zadania:

10. Dowieść, że zbiór $\{a+b\sqrt{2}: a,b\in\mathbb{Q}\}$ ze zwykłym dodawaniem i mnożeniem jest ciałem.

11. Udowodnić, że pierścienie $\mathbb{Z}_5$ i $\mathbb{Z}_7$ są ciałami, a pierścienie $\mathbb{Z}_6$ i $\mathbb{Z}_4$ nie są ciałami.

12. Udowodnić, że liczba $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ jest algebraiczna.

13. Rozwiązać w liczbach zespolonych równanie $z^4+z^2-2=0$.

4. Przestrzenie liniowe nad $\mathbb{R}$.

Pojęcia, fakty: podprzestrzenie liniowe, liniowa kombinacja wektorów, niezależność wektorów, wymiar przestrzeni liniowej, współrzędne wektora w bazie, przekształcenie liniowe, macierz przekształcenia w bazach, jądro, obraz i rząd przekształcenia liniowego.

Umiejętności: umiejętność sprawdzania liniowej zależności/niezależności wektorów, umiejętność ilustrowania przykładami pojęć wymienionych powyżej, umiejętność wyznaczania jądra, obrazu i rzędu przekształcenia liniowego.

Przykładowe zadania:

14. Rozpatrujemy ciało $\mathbb{R}$ jako przestrzeń liniową nad ciałem $\mathbb{Q}$. Dowieść, że każdy z układów $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ i $\{1, \sqrt{3}, \sqrt{5}\}$ jest liniowo niezależny i że układ $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}, 2\sqrt{3}\}$ jest liniowo zależny.

15. Czy układ $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$?

16. Znaleźć takie wartości parametru a, by wektory $(a,1,0)$, $(1,a,3)$, $(a,1,1)$ należące do $\mathbb{R}^3$ były liniowo zależne.

17. Znaleźć bazy obrazu i jądra przekształcenia liniowego $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ określonego wzorem

$$\varphi((x_1,x_2,x_3)) = (x_1+2x_2-x_3,\ x_1+x_2+2x_3,\ 2x_1+3x_2+x_3).$$

18. Znaleźć współrzędne wektora $(1,1,1,1)$ w bazie przestrzeni $\mathbb{R}^4$ złożonej z wektorów: $(1,0,1,1)$, $(1,0,1,4)$, $(1,0,-1,0)$, $(0,1,0,0)$.

5. Macierze i wyznaczniki, układy równań liniowych.

Pojęcia, fakty: algebra macierzy; rząd macierzy; wyznacznik, rozwinięcie Laplace'a, macierz odwrotna, wielomian charakterystyczny, układy cramerowskie, twierdzenie Kroneckera-Cappellego, metoda eliminacji Gaussa, układy jednorodne.

Umiejętności: umiejętność wykonywania działań na macierzach, wyznaczanie rzędu macierzy, obliczanie wyznaczników i znajdowanie macierzy odwrotnej, umiejętność rozwiązywania układów równań liniowych co najmniej dwoma metodami: metodą eliminacji Gaussa oraz przy pomocy wzorów Cramera.

Przykładowe zadania:

19. Obliczyć rzędy macierzy

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

20. Znaleźć macierz odwrotną do macierzy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

21. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n mamy

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

22. Rozwiązać układ równań metodą eliminacji Gaussa:

$$x_1+3x_2+2x_3=1, \quad 4x_1+x_2+3x_3=3, \quad 2x_1+2x_2+3x_3=4.$$

6. Przestrzenie euklidesowe.

Pojęcia, fakty: iloczyn skalarny, norma wektora i nierówność trójkąta, bazy ortogonalne i ortonormalne; przekształcenia liniowe i izometrie liniowe przestrzeni euklidesowych; wektory własne i wartości własne odwzorowań liniowych.

Umiejętności: umiejętność znajdowania wektorów własnych i wartości własnych odwzorowań liniowych; znajomość przykładów i własności izometrii liniowych przestrzeni E^2 i E^3.

Przykładowe zadania:

23. Niech $P: E^2 \to E^2$ oznacza rzut prostopadły na prostą o równaniu $2x+3y=0$. Wyprowadzić wzór na $P(x,y)$.

24. Wyznaczyć wartości własne i odpowiadające im wektory własne następujących macierzy:

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Rachunek Prawdopodobieństwa.

1. Prawdopodobieństwo z użyciem kombinatoryki.

Pojęcia, fakty: permutacje, kombinacje, wariacje, wzór dwumianowy, wzór wielomianowy, model urnowy

Umiejętności: wyliczanie prawdopodobieństw z użyciem kombinatoryki jako ilorazu ilości zdarzeń sprzyjających do możliwych.

Przykładowe zadania:

1. Rzucamy kostkami zieloną i czerwoną. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wynik na czerwonej jest większy niż na zielonej?

2. Wyprodukowano 10000 żarówek, w tym 20 wadliwych. Testujemy niezależnie 100 żarówek. Jakie jest prawdopodobieństwo, że 99 testowanych żarówek jest dobrych?

3. Samuel Pepys napisał do Isaaca Newtona : *co jest bardziej prawdopodobne (a) jedna 6 w 6 rzutach kostką (b), czy dwie 6 w 12 rzutach*? Obliczyć te prawdopodobieństwa.

4. Przypuśćmy, że kostka do gry ma 1 na trzech ścianach, 2 na dwóch ścianach i 3 na jednej ścianie. Rzucamy taką kostką 10 razy. Wyliczyć prawdopodobieństwo uzyskania 5 razy 1, 3 razy 2 i 2 razy 3.

2. Prawdopodobieństwo warunkowe, niezależność.

Pojęcia, fakty: prawdopodobieństwo sumy zdarzeń, nierówności Bonferroniego, niezależność zdarzeń parami, niezależność ciągu zdarzeń, schemat Bernoulliego, wzór na prawdopodobieństwo całkowite, wzór Bayesa.

Umiejętności: umiejętność wykorzystania warunku niezależności do oblicznia prawdopodobieństw, umiejętność zastosowania wzoru na prawdopodobieństwo całkowite i wzoru Bayesa.

Przykładowe zadania:

5. Dane są dwa pudełka. W jednym pudełku znajduje się jedna kula biała i jedna czarna. W drugim dwie czarne kule i jedna biała. Wybieramy losowo pudełko i z wybranego pudełka wybieramy losowo kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wybrana kula będzie czarna?

6. Niech A, B, C oznaczają odpowiednio zdarzenia: Ala i Basia mają urodziny tego samego dnia; Basia i Kasia mają urodziny tego samego dnia; Kasia i Ala mają urodziny tego samego dnia. Dowieść, że A, B, C są niezależne parami, nie są jednak niezależne jako ciąg zdarzeń.

7. Rzucamy (niezależnie) symetryczną kostką do chwili uzyskania 6. Niech N oznacza ilość potrzebnych rzutów. Obliczyć $P(N=3)$.

8. Powtarzamy rzuty kostką, do czasu uzyskania dokładnie 3 szóstek. Jeśli T jest liczbą potrzebnych prób, obliczyć $P(T=6)$.

3. Zmienne losowe.

Pojęcia, fakty: funkcja prawdopodobieństwa zmiennej (Poissona, dwumianowa, geometryczna), dystrybuanta zmiennej losowej, gęstość dystrybuanty (normalna, wykładnicza), mieszanki dystrybuant, rozkłady łączne i brzegowe pary zmiennych losowych, rozkład sumy niezależnych zmiennych losowych (splot).

Umiejętności: umiejętność liczenia rozkładów brzegowych i warunkowych z rozkładu łącznego, umiejętność liczenia splotów rozkładów, liczenie rozkładów funkcji od zmiennych losowych.

Przykładowe zadania:

9. Zmienne X, Y mają łączny rozkład zadany tabelą

$X\backslash Y$	1	2	3
0	0.01	0.04	0.05
1	0.03	0.04	0.03
2	0.12	0.16	0.12
3	0.04	0.16	0.20

Obliczyć $P(X=2\,|\,Y\geqslant 2)$.

10. Niech X będzie zmienną o rozkładzie wykładniczym o gęstości $f(x)=3e^{-3x}$, $x>0$ oraz $\psi(x)=x^2$. Obliczyć dystrybuantę i gęstość zmiennej $\psi(X)$.

11. Niech X,Y będą współrzędnymi punktu wylosowanego na płaszczyźnie. Zakładając, że X i Y są niezależne o rozkładach normalnych $N(0,1)$, znaleźć prawdopodobieństwo, że punkt znajduje się w kole jednostkowym, tzn., $P((X^2+Y^2)^{\frac{1}{2}}\leqslant 1)$.

4. Wartość oczekiwana.

Pojęcia, fakty: momenty zmiennej losowej, wariancja, odchylenie standardowe, mediana, funkcja tworząca, funkcja tworząca momenty, kowariancja

Umiejętności: liczenie wartości oczekiwanej, wariancji, kowariancji znajdowanie momentów przy użyciu funkcji tworzących

Przykładowe zadania:

12. Zmienne X,Y mają łączny rozkład zadany tabelą

$X\backslash Y$	1	2	3
0	0.02	0.04	0.04
1	0.03	0.04	0.03
2	0.12	0.16	0.12
3	0.04	0.16	0.20

Obliczyć EX, EY oraz VarX i VarY.

13. Z urny zawierającej 3 kul czarnych, 4 czerwonych, 3 białych, wyciągamy 3 kule. Niech U oznacza liczbę wyciągniętych kul czarnych, V liczbę kul czerwonych. Znaleźć $Cov(U,V)$.

14. Niech $X_1,X_2,\ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na $(0,1)$ oraz N niezależną od tego ciągu zmienną losową, o rozkładzie $P(N=k)=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{(k-1)}$, $k=1,2,\ldots$. Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej $Y=X_1+\cdots+X_N$.

5. Twierdzenia graniczne.

Pojęcia, fakty: przybliżenie rozkładu dwumianowego rozkładem Poissona, nierówność Czebyszewa, słabe Prawo Wielkich Liczb, mocne Prawo Wielkich Liczb, Centralne Twierdzenie Graniczne (CTG).

Umiejętności: zastosowanie twierdzeń granicznych do przybliżania wartości średniej oraz do znajdowania przybliżonych wartości rozkładu sum niezależnych zmiennych losowych.

Przykładowe zadania:

15. Dla zmiennej S o rozkładzie dwumianowym z parametrami $n=12$ i $p=\frac{1}{36}$ znaleźć wartość przybliżoną $P(S=5)$, używając rozkładu Poissona.

16. Gramy rzucając kostką, stawiamy na parzyste 81 razy, wygrywając lub przegrywając za każdym razem 1 zł. Jakie jest prawdopodobieństwo, że saldo gry będzie dodatnie po 81 grach? Używając CTG i tablic rozkładu normalnego podać wartość przybliżoną tego prawdopodobieństwa.

17. Wykonujemy kolejne, niezależne rzuty monetą symetryczną. Niech $X_i=1$ jeśli wypada orzeł, $X_i=0$, jeśli wypada reszka, $i=1,\ldots$. Ile razy należałoby rzucić, aby z nierówności Czebyszewa wywnioskować, że prawdopodobieństwo tego, że średnia arytmetyczna $\frac{X_1+\cdots+X_i}{i}$ różni się od 0.5 o więcej niż 0.01 jest mniejsze lub równe od 4%?

Zakres egzaminu dyplomowego (część II). Specjalność nauczycielska.

Komisja Egzaminów Dyplomowych ustala, że **w roku akademickim** 2001/2002 egzamin dyplomowy (część II, dla specjalności nauczycielskiej) dotyczyć będzie niżej wymienionych zagadnień: [1]

1. Statystyka.

Pojęcia, fakty: estymacje punktowe i przedziałowe, testowanie hipotez w rozkładzie normalnym, test χ^2 zgodności

Przykładowe zadania:

1. W celu sprawdzenia, czy pewna kostka do gry jest symetryczna, rzucono ją 100 razy i otrzymano następujące wyniki:

liczba oczek	1	2	3	4	5	6
liczba rzutów	10	8	15	24	18	25

Sprawdzić hipotezę, że kostka jest symetryczna.

2. W sondażu przedwyborczym wzięło udział 1600 respondentów. Spośród nich 800 osób oświadczyło, że będzie głosować na partię "X". Oszacować na poziomie ufności 95% przedział ufności dla prawdopodobieństwa poparcia tej partii wśród **wszystkich** wyborców.

[1] W tym roku pomienięto tematykę z wykładów: *Analiza 4, Podstawy geometrii i geometria nieeuklidesowa, Wstęp do topologii* i *Logika*. Jednak pewne zagadnienia z tych przedmiotów mogą pojawić się na egzaminie o ile są "językiem" wysławiania zadań z innych wykładów; np.:

0. Które ze zdań definiuje liczbę pierwszą p w zbiorze liczb naturalnych?
a) $p>1 \wedge (\forall a \forall b(a\cdot b=p \Rightarrow (a=1 \vee b=1)))$
b) $p>1 \wedge (\forall a \forall b(a\cdot b=p \Rightarrow (a=p \vee b=p)))$
c) $p>1 \wedge (\forall a\, (\exists b(a\cdot b=p)) \Rightarrow (a=1 \vee a=p))$
d) $p>1 \wedge \neg((\exists a)\, (\exists b)\, (a\cdot b=p \wedge a>1 \wedge b>1))$

2. Równania różniczkowe.

Pojęcia, fakty: proste zastosowania równań rózniczkowych zwyczajnych, równania liniowe drugiego rzędu, układy równań różniczkowych liniowych, metoda przybliżona Eulera

Przykładowe zadania:

3. Wiadomo, że szybkość zmian temperatury danego ciała jest proporcjonalna do różnicy między temperaturą tego ciała i temperaturą otoczenia. Zakładamy, że $S(0)=100°C$ w temperaturze otoczenia $20°C$. Po dziesięciu minutach temperatura ciała wynosi $60°C$. Po ilu minutach ciało będzie miało temperaturę $25°C$?

4. Rozwiązać równanie $y''+4y'+5y=0$ przy warunku początkowym $y(0)=-3$, $y'(0)=0$.

5. Znaleźć rozwiązanie $(x(t),y(t))$ zgadnienia:

$$\frac{dx}{dt}=-x-y, \quad \frac{dy}{dt}=2x-y, \quad x(0)=y(0)=1\,.$$

6. Rozważmy zagadnienie: $y'=1+t-y$, $y(0)=0$. Używając metody Eulera ($y_{k+1}=y_k+hf(t_k,y_k)$) z krokiem $h=0{,}1$ wyznaczyć przybliżoną wartość rozwiązania dla $t=1$.

3. Arytmetyka i teoria liczb.

Pojęcia, fakty: układy pozycyjne, rozwinięcia dziesiętne, indukcja, ułamki łańcuchowe, kongruencje, równania diofantyczne, tw. Eulera: $(a,n)=1 \Rightarrow a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$, liczby pierwsze

Przykładowe zadania:

7. Podać rozwinięcie dziesiętne (wskazując okres) liczby:
a) $1{,}23(574)+2,(6878)$, **b)** $1{,}23(574)-2,(6878)$, **c)** $1{,}23(574)+\frac{3}{11}-\frac{5}{7}$.

8. Znaleźć dwie cyfry po przecinku rozwinięcia dwójkowego $\sqrt{3}$.

9. Czy $7^{103} \equiv 5 \pmod{27}$?

10. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $2x+7y=10$ w liczbach całkowitych.

11. Uzasadnić, że jeśli $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(p-1)\equiv -1 \pmod{p}$ i $p>1$, to p jest liczbą pierwszą.

12. Ile dzielników naturalnych ma liczba
a) $11\cdot 13\cdot 17\cdot 19$ **b)** $2^{11}\cdot 3^{13}\cdot 5^{17}\cdot 7^{19}$ **c)** $120^3\cdot 98$

13. Uzasadnić, że dla każdej liczby naturalnej $n>2$ istnieje liczba pierwsza p większa od n i mniejsza od n^n.
(Wskazówka: skorzystać z idei dowodu Euklidesa twierdzenia o tym, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.)

14. Ile jest ułamków nieskracalnych postaci $\frac{n}{1000}$, gdzie $1 \leqslant n < 1000$?

15. Uzasadnić niewymierność liczby

$$x=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\ldots}}}}$$

Czy jest to liczba algebraiczna?

4. Geometria elementarna I, II. Konstrukcje geometryczne.

Pojęcia, fakty: elementarne własności trójkątów, wielokątów, tw. Cevy, locus, klasyfikacja izometrii i podobieństw płaszczyzny, stożkowe, wielościany platońskie, archimedesowskie, podstawowe konstrukcje platońskie

Przykładowe zadania:

16. Uzasadnić, że jeśli czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, to
$$AB\cdot CD+BC\cdot DA=AC\cdot BD.$$

17. W pewnej izometrii płaszczyzny obrazem punktu $A=(1,2)$ jest punkt $A'=(4,8)$, punktu $B=(3,0)$ – punkt $B'=(3,10)$, a punktu $C=(0,0)$ – punkt $C'=(6,10)$.
a) Przedstawić tę izometrię jako złożenie symetrii osiowych.
b) Podać opis tej izometrii jako przekształcenia w zbiorze liczb zespolonych.

18. Niech A będzie punktem paraboli o ognisku O i kierownicy k. Niech ℓ oznacza symetralną odcinka OA', gdzie A' jest rzutem prostokątnym punktu A na prostą k. Uzasadnić, że parabola zawarta jest w półpłaszczyźnie wyznaczonej przez prostą ℓ i punkt O.

19. Podać konstrukcję dziesięciokąta foremnego.

20. Zakładając, że dane są odcinki o długościach a, b i c oraz odcinek jednostkowy podać konstrukcję odcinka o długości $\frac{ab}{c}+\sqrt{bc+1}$.

21. Niech dany będzie okrąg $o(S,r)$ i punkt A leżący wewnątrz tego okręgu. Znaleźć miejsce geometryczne punktów X takich, że odległość AX jest równa odległości punktu X od danego okręgu.
(Podać również rozwiązanie analityczne.)

22. Uzasadnić (korzystając ze wzoru Eulera), że nie istnieje wielościan wypukły, którego **każda** ściana jest siedmiokątem.

Specjalność teoretyczna.

1. Algebra.

Pojęcia, fakty: przestrzenie liniowe, baza i wymiar, odwzorowanie liniowe, funkcjonały i formy kwadratowe, formy hermitowskie, twierdzenie Sylvestera, przestrzenie unitarne, endomorfizmy samosprzężone, wartości i wektory własne, diagonalizacja, grupy pierścienie i ciała, podgrupy i twierdzenie Lagrange'a, podgrupy normalne i ideały, grupy i pierścienie ilorazowe, homomorfizmy, centrum, komutant, struktura grup abelowych skończenie generowalnych, pierścień liczb całkowitych i pierścienie wielomianów jednej zmiennej, algorytm Euklidesa i teoria podzielności w pierścieniach euklidesowych, ciała proste.

Przykładowe zadania:

1. Podać przykłady czterech parami nieizomorficznych grup rzędu 8 wraz z uzasadnieniem ich nieizomorficzności.

2. Znaleźć centrum w grupie nieosobliwych macierzy rzeczywistych 2×2.

3. Znaleźć bazę ortonormalną w przestrzeni $P_2[-1,1]$ wielomianów rzeczywistych stopnia $\leqslant 2$ na przedziale $[-1,1]$, z iloczynem skalarnym $\langle f_1,f_2\rangle = \int_{-1}^{1} f_1(x)f_2(x)dx$. Podać przykład jakiegoś unitarnego automorfizmu tej przestrzeni.

4. Uzasadnić, że podzbiór I_x w pierścieniu funkcji ciągłych $C[0,1]$ składający się z wszystkich funkcji f zerujących się w punkcie $x\in[0,1]$, jest ideałem maksymalnym w tym pierścieniu.

5. Podać definicję największego wspólnego dzielnika w dowolnym pierścieniu. Z jaką dokładnością jest on określony? Uzasadnić, że jeśli elementy a,b mają największy wspólny dzielnik, to mają go też elementy $a,a+b$.

2. Analiza wielu zmiennych i rozmaitości różniczkowalne.

Pojęcia, fakty: pochodne cząstkowe i różniczka funkcji wielu zmiennych, twierdzenia o funkcji uwikłanej i o rzędzie, ekstrema funkcji wielu zmiennych, ekstrema warunkowe, całka wielowymiarowa i całka wielokrotna, zamiana zmiennych, równania parametryczne krzywych i powierzchni, całki powierzchniowe i twierdzenie Greena, długość i krzywizna krzywej, pole powierzchni, rozmaitości, funkcje i odwzorowania gładkie na rozmaitościach, dyfeomorfizmy, podrozmaitości, wiązka styczna, metryka Riemanna i długość krzywej na rozmaitości.

Przykładowe zadania:

6. Wśród trójkątów o ustalonym polu powierzchni znaleźć ten, który ma najmniejszy obwód.

7. Dana jest krzywa regularna $\gamma:(a,b)\to\mathbb{R}^2$ oraz punkt A nie leżący na tej krzywej. Uzasadnić, że jeśli $\gamma(t_0)$ jest punktem tej krzywej leżącym najbliżej punktu A, to odcinek $A\gamma(t_0)$ jest prostopadły do stycznej krzywej γ w punkcie $\gamma(t_0)$.

8. Niech X będzie polem wektorowym na $\mathbb{R}^2$ równym gradientowi różniczkowalnej funkcji $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, i niech $\gamma(t)$ będzie rozwiązaniem równania różniczkowego $\gamma'(t)=X(\gamma(t))$ z warunkiem początkowym $\gamma(0)=(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$. Uzasadnić, że dla dowolnego t z przedziału określoności rozwiązania γ zachodzi równość $f(\gamma(t))=f(x_0,y_0)+t$.

9. Obliczyć pole odcinka sfery o promieniu r zawartego pomiędzy pewną płaszczyzną styczną do tej sfery a równoległą do niej płaszczyzną leżącą po tej samej stronie, co sfera, w odległości $d<r$ od tej płaszczyzny stycznej.

3. Analiza funkcjonalna.

Pojęcia, fakty: normy, normy w przestrzeniach funkcyjnych, operatory liniowe ograniczone, przestrzeń Banacha, twierdzenie o operatorze odwrotnym, twierdzenie Banacha-Steinhausa, funkcjonały, twierdzenie Hahna-Banacha, przestrzenie Hilberta, ortogonalność, twierdzenie Riesza o funkcjonale.

Przykładowe zadania:

10. Znaleźć wzorem izomorfizm przestrzeni Hilberta $L^2[0,1]$ i $L^2[0,2]$. Znaleźć też wzorem izometrię przestrzeni Hilberta $L^2[0,1]$ na swój właściwy podzbiór.

11. Podać wraz z uzasadnieniem przykład operatora ograniczonego na przestrzeni Hilberta, którego obraz nie jest podprzestrzenią domkniętą.

12. Uzasadnić, że jeżeli złożenie dwóch operatorów ograniczonych na przestrzeni Banacha jest operatorem odwracalnym, to każdy ze składowych operatorów jest odwracalny.

4. Calculus i równania różniczkowe.

Pojęcia, fakty: kresy zbiorów, zbieżność ciągów i szeregów, zbieżność warunkowa, zbieżność bezwzględna, granice górne i dolne, ciągi i szeregi funkcyjne, zbieżność jednostajna, pochodna i wzór Taylora, szeregi potęgowe, całka, twierdzenie Stone'a-Weierstarassa, równania różniczkowe zwyczajne w dowolnym wymiarze, istnienie i jednoznaczność rozwiązań, gładka zależność od warunków początkowych oraz od parametrów, przedłużalność rozwiązań, równania zwyczajne liniowe o stałych współczynnikach, równania różniczkowe cząstkowe: równanie falowe (konstrukcja rozwiązania ogólnego, rozwiązanie zagadnienia początkowego), równanie ciepła, metoda Fouriera rozdzielania zmiennych.

Przykładowe zadania:

13. Uzasadnić, że jeśli ciąg dodatni (a_n) monotonicznie zbiega do zera, to szereg naprzemienny $\sum(-1)^n a_n$ jest zbieżny.

14. Uzasadnić, że podzbiór funkcji kawałkami liniowych jest gęsty w przestrzeni funkcji ciągłych $C[0,1]$ z metryką jednostajną.

15. Posługując się wzorem Taylora i szacując w nim resztę znaleźć przybliżenie liczby $\ln 2$ z dokładnością $1/10$.

16. Podać przykład ciągłego pola wektorowego na $\mathbb{R}^2$, którego trajektorie nie są określone dla każdego $t \in \mathbb{R}$, oraz takiego, dla którego trajektorie wychodzące z ustalonego punktu nie są jednoznaczne.

17. Rozważmy teoretyczny model, w którym ciało opadające swobodnie w wodzie podlega tarciu proporcjonalnemu do prędkości opadania. Ułożyć i rozwiązać równanie różniczkowe dające opis ruchu takiego ciała.

18. We współrzędnych geograficznych na sferze znaleźć równanie linii przecinającej południki pod stałym kątem.

19. Rozdzielając zmienne rozwiązać równanie $tu_t = u_{xx} + 2u$ z warunkami brzegowymi $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$. Udowodnić, że równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań spełniających warunek początkowy $u(x,0) = 0$.

Także zadania z równań różniczkowych dla sekcji zastosowań.

5. Funkcje rzeczywiste i funkcje analityczne.

Pojęcia, fakty: σ-ciała, miara Lebesgue'a, funkcje mierzalne, całka Lebesgue'a, twierdzenia o przechodzeniu do granicy pod całką, miary produktowe, twierdzenie Fubiniego, równania Cauchy-Riemanna, całki zespolone, wzór Cauchy'ego, rozwijanie w szereg potęgowy, funkcje całkowite, zasada maksimum, bieguny i residua.

Przykładowe zadania:

20. Podać wraz z uzasadnieniem przykład nieprzeliczalnego zbioru miary zero na prostej rzeczywistej.

21. Uzasadnić, że obraz różniczkowalnej krzywej regularnej w $\mathbb{R}^2$ (tzn. takiej, której wektor styczny w każdym punkcie jest niezerowy) ma miarę zero.

22. Niech Ω będzie otwartym obszarem w $\mathbb{C}$, zaś $f : \Omega \to \mathbb{C}$ niech będzie różnowartościową funkcją holomorficzną taką, że $f'(z) \neq 0$ dla każdego $z \in \Omega$. Uzasadnić, że miara Lebesgue'a zbioru $f(\Omega)$ wyraża się wzorem

$$|f(\Omega)| = \int_{\Omega} |f'(z)|^2 dx\,dy,$$

gdzie $z=x+iy$.

23. Uzasadnić, że miejsca zerowe funkcji analitycznej f, nie równej tożsamościowo zeru, są punktami izolowanymi.

24. Uzasadnić, że jeśli $f:\Omega\to\mathbb{C}$ jest funkcją analityczną taką, że $f'(z)\neq 0$ dla każdego $z\in\Omega$, to obraz $f(U)$ dowolnego otwartego podzbioru $U\subset\Omega$ jest zbiorem otwartym.

6. Rachunek prawdopodobieństwa.

Pojęcia, fakty: prawdopodobieństwo z użyciem kombinatoryki, schemat Bernoulliego, prawdopodobieństwo warunkowe, niezależność, zmienne losowe dyskretne i ciągłe, wartość oczekiwana, rozkłady zmiennych losowych, momenty i wariancja, funkcja tworząca, nierówność Czebyszewa i słabe prawo wielkich liczb, centralne twierdzenie graniczne.

Przykładowe zadania:

25. Momenty przybycia autobusów A i B są niezależnymi zmiennymi losowymi X i Y o rozkładach wykładniczych z parametrami α i μ.

(a) Znaleźć rozkład momentu przybycia pierwszego autobusu.

(b) Obliczyć prawdopodobieństwo, że autobus A przyjedzie pierwszy.

26. Udowodnić, że jeśli ciąg zmiennych losowych X_n jest zbieżny w L^2, to ciąg X_n^2 jest zbieżny w L^1.

27. Niech $(X_k:k\in\mathbb{N})$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowych rozkładach wykładniczych.

(a) Znaleźć rozkłady zmiennych $X_1+\ldots+X_n$, dla dowolnego n.

(b) Dla ustalonej liczby $t\geqslant 0$ rozważmy zmienną losową

$$N_t=\max\{n:X_1+\ldots+X_n\leqslant t\}.$$

Znaleźć rozkład zmiennej losowej N_t. Jaki to rozkład?

28. Udowodnić, że jeśli X_n jest ciągiem zmiennych losowych o wspólnie ograniczonych wariancjach oraz o współczynnikach korelacji $\rho(X_i,X_j)\to 0$, gdy $|i-j|\to\infty$, to ciąg ten spełnia słabe prawo wielkich liczb.

29. Rozważmy ciąg niezależnych rzeczywistych zmiennych losowych (X_n) o średnich m_n i wariancjach σ_n^2 takich, że $0 < a_1 \leqslant \sigma_n^2 \leqslant a_2$,

$$0 < b_1 \leqslant E|X_n - m_n|^3 \leqslant b_2$$

dla pewnych stałych a_1, a_2, b_1, b_2. Czy dla tego ciągu jest spełnione centralne twierdzenie graniczne?

7. Topologia i teoria mnogości.

Pojęcia, fakty: relacje równoważności oraz częściowego i liniowego porządku, moc zbioru, przeliczalność i moc continuum, dobre porządki i indukcja pozaskończona, przestrzenie metryczne, odwzorowania ciągłe, zupełność, zwartość, spójność, drogowa spójność, ośrodkowość, metryki równoważne, przestrzenie topologiczne, topologia produktowa, topologia ilorazowa, topologia indukowana na podzbiór, homeomorfizm, zbiory nigdziegęste i twierdzenie Baire'a.

Przykładowe zadania:

30. Uzasadnić, że każdy otwarty podzbiór prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$ jest przeliczalną sumą otwartych parami rozłącznych przedziałów.

31. Uzasadnić, że następujące przestrzenie topologiczne nie są homeomorficzne: $[0,1]$, $\mathbb{R}$, $[0,1]\times[0,1]$, $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, $[0,1]\times\mathbb{Q}$, zbiór Cantora, $[0,1]\setminus\mathbb{Q}$.

32. Czy przestrzeń $C^1[0,1]$ różniczkowalnych w sposób ciągły funkcji rzeczywistych z normą $\|f\| = \sup(|f|) + \sup(|f'|)$ jest: zupełna, zwarta, spójna, ośrodkowa? Odpowiedzi uzasadnić.

33. Na płaszczyźnie dany jest ograniczony zbiór B zawierający przynajmniej dwa punkty. Uzasadnić, że wśród kół domkniętych zawierających zbiór B istnieje koło o najmniejszym promieniu, oraz że koło o tej własności jest jedyne.

34. Uzasadnić, że obraz różniczkowalnej krzywej regularnej na płaszczyźnie nie może być całą płaszczyzną. Zastosować twierdzenie Baire'a.

Specjalność zastosowań.

1. Równania różniczkowe.

Pojęcia, fakty: równanie różniczkowe 1-go rzędu *(jednorodne i niejednorodne, zagadnienie Cauchy'ego, równanie o zmiennych rozdzielonych, numeryczna aproksymacja rozwiązań, schemat Eulera)*, równania liniowe drugiego rzędu *(równaie liniowe o stałych współczynnikach, równanie charakterystyczne, metoda uzmienniania stałej, transformata Laplace'a)*, układ równań liniowych 1-go rzędu *(konstrukcja bazy rozwiązań układu równań liniowych)*, równanie falowe *(konstrukcja rozwiązania ogólnego, rozwiązanie zagadnienia początkowego)*, równanie ciepła *(konstrukcja rozwiązania przy pomocy metody Fouriera rozdzielonych zmiennych).*

Przykładowe zadania:

1. Wiadomo, że szybkość zmian temperatury danego ciała jest proporcjonalna do różnicy między temperaturą tego ciała i temperaturą otoczenia (prawo Newtona). Zakładamy, że $S(0)=100°C$ w temperaturze otoczenia $20°C$. Po dziesięciu minutach temperatura ciała wynosiła $60°C$. Po ilu minutach ciało będzie miało temperaturę $25°C$?

2. Rozwiązać równania:
$y'=(1+t)(1+y), \quad y'=e^{t+y+3}.$

3. Znaleźć rozwiązania następujących zagadnień:
a) $y''+y'-10y=0, \quad y(1)=5, \quad y'(1)=2;$
b) $y''+y'+2y=0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=-2;$

4. Stosując transformatę Laplace'a znaleźć rozwiązania następujących zagadnień:
a) $y''-5y'+4y=e^{2t}, \quad y(0)=1,\ y'(0)=-1;$
b) $y''-3y'+2y=e^{-t}, \quad y(0)=1,\ y'(0)=0;$

5. Znaleźć rozwiązania następujących zagadnień:
a) $x'=x+y, \quad y'=4x+y, \quad x(0)=2, \quad y(0)=3;$
b) $x'=3x-2y, \quad y'=4x-y, \quad x(0)=1, \quad y(0)=5;$

2. Rachunek prawdopodobieństwa.

Pojęcia, fakty: podstawowe pojęcia i fakty z teorii miary *(miara Lebesgue'a, całka Lebesgue'a, lemat Fatou, twierdzenie o zbieżności zmajoryzowanej, twierdzenie o zbieżności monotonicznej)*, rozkład zmiennej losowej, gęstość rozkladu, nierówności związane z momentami *(nierówność Schwarza, nierówność Jensena, nierówność Czebyszewa)*, lemat Borela-Cantelliego, warunkowe prawdopodobieństwo i warunkowa wartość oczekiwana względem $\sigma-$ciała, typy zbieżności zmiennych losowych *(zbieżność prawie wszędzie, zbieżność według prawdopodobieństwa, zbieżność według momentów, zbiezność według rozkładu)*, funkcje charakterystyczne, twierdzenia graniczne *(słabe prawo wielkich liczb, mocne prawo wielkich liczb, centralne twierdzenie graniczne, twierdzenie Poissona).*

Przykładowe zadania:

6. Momenty przybycia autobusów A i B są niezależnymi zmiennymi losowymi X, Y o rozkładach wykładniczych z parametrami α i μ.

a) Znaleźć rozkład momentu przybycia pierwszego autobusu.

b) Obliczyć prawdopodobieństwo, że autobus A przyjedzie pierwszy.

7. Udowodnić, że jeśli ciąg zmiennych losowych $\{\sqrt{X_n}\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny w L^2, to ciąg $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny w L^1.

8. Zmienna losowa X_λ ma rozkład Poissona z parametrem λ. Zbadać, dla $\lambda \to \infty$, zbieżność według rozkładu zmiennych losowych

$$\frac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}.$$

9. Udowodnić, że jesli $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem zmiennych losowych o wspólnie ograniczonych wariancjach $Var(X_N) \leqslant C < \infty$ $n = 1,2,\ldots$ oraz współczynnikach korelacji takich, że $\rho(X_i, X_j) \to 0$, gdy $|i-j| \to \infty$ to $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ spełnia słabe prawo wielkich liczb.

3. Statystyka matematyczna.

Pojęcia, fakty: wektory losowe *(dystrybuanty i gęstości wielowymiarowe, macierz kowariancji, korelacja, wielowymiarowy rozkład normalny)*, przestrzenie statystyczne i statystyki *(przestrzeń prób, statystyki i ich rodziny rozkładów, rozkład empiryczny i dystrybuanta empiryczna, charakterystyki próbkowe, statystyki pozycyjne, rozkłady asymptotyczne statystyk)*, dostateczność i zupełność statystyk *(kryterium faktoryzacji, wykładnicze rodziny rozkładów, statystyki zupełne, twierdzenie Basu i jego zastosowania)*, estymacja *(metody estymacji, informacja Fishera, estymatory nieobciążone z minimalną wariancją)*, testowanie hipotez statystycznych *(testy jednostajnie najmocniejsze, lemat Neymana-Pearsona, testy ilorazu wiarogodności, testy dla rozkładu normalnego, problem dwóch prób, testy zgodności, jednorodności i niezależności, zbiory ufności)*, problem dwóch prób *(test Studenta i jego odmiana dla porównań parami, testy rangowe)*, testy rangowe jednorodności, symetrii, niezależności, testy zgodności *(chi-kwadrat, Kołmogorowa-Smirnowa)*, zbiory ufności, model liniowy Gaussa-Markowa, metoda najmniejszych kwadratów, analiza wariancji *(klasyfikacja pojedyncza)*, Zagadnienie regresji i korelacji *(estymacja parametrów i testowanie hipotez, współczynniki korelacji cząstkowej i wielokrotnej)*.

Przykładowe zadania:

10. Niech $\mathbf{X}=(X_1,X_2,...,X_n)'$ będzie próbą z rozkładu P ze skończoną wariancją σ^2. Czy istnieje nieobciążony estymator z jednostajnie minimalną wariancją dla dyspersji σ, gdy P jest rozkładem:
a) zero-jedynkowym $b(1,p)$, $\quad 0<p<1$;
b) wykładniczym $E(\lambda)$, $\quad \lambda>0$;
c) normalnym $N(0,\sigma^2)$, $\quad \sigma>0$.
Odpowiedź uzasadnić. W przypadku, gdy jest ona pozytywna, wyznaczyć estymator.

11. Obsługa działa artyleryjskiego ma 3 pociski. Prawdopodobieństwo trafienia celu jednym pociskiem (przy jednym wystrzale) jest nieznane i wynosi $p\in[0,1]$. Strzelanie kończy się z chwilą trafienia celu albo wyczerpania się pocisków. Wykonano takie strzelanie. Zakładając,

że kolejne strzały są niezależne, na podstawie zaobserwowanej liczby oddanych strzałów wyznaczyć estymatory parametru p:
(a) nieobciążony z minimalną wariancją,
(b) największej wiarogodności,
(c) metodą momentów,
(d) bayesowski, gdy parametr p ma rozkład *a priori* jednostajny $U(0,1)$, a funkcja straty jest kwadratowa.
Zbadać nieobciążoność estymatorów i obliczyć ich ryzyka kwadratowe. Który z nich jest najlepszy?

12. Na podstawie próby $\mathbf{X}=(X_1,X_2,\dots,X_n)$ z rozkładu wykładniczego $Ex(\lambda)$, $\lambda>0$, testuje się hipotezę $H:\lambda=1$ przy hipotezie alternatywnej $K:\lambda<1$. Rozważa się dwa testy dla weryfikacji tej hipotezy z odpowiednimi obszarami krytycznymi:

$$S_1=\{\mathbf{x}:\sum_{i=1}^{n}x_i>c_1\} \qquad \text{i} \qquad S_2=\{\mathbf{x}:x_{1:n}=\min_{i\geqslant 1}x_i>c_2\},$$

gdzie stałe c_1 i c_2 są tak dobrane, aby testy miały rozmiar α.
a) Jakie rozkłady mają statystyki wyznaczające obszary krytyczne S_1 i S_2, zarówno przy hipotezie H, jak i przy alternatywach K?
b) Wyznaczyć funkcje mocy obu testów w takiej postaci, aby można było je obliczać przy użyciu zwykłych tablic statystycznych.
c) Czy któryś z tych testów jest jednostajnie mocniejszy od drugiego?

13. Entomolog pobierał losową próbę z dużej populacji pewnych owadów. Notował płeć chwytanych osobników i przerwał pobieranie próby, gdy złapał M-tego ($M>1$) osobnika męskiego. Otrzymał w ten sposób próbę owadów o liczebności X. Niech θ oznacza nieznaną frakcję osobników męskich w populacji.
a) Opisać przestrzeń prób i rodzinę rozkładów prawdopodobieństwa na niej.
b) Wyznaczyć estymator nieobciążony z jednostajnie minimalną wariancją dla parametru θ i obliczyć jego wariancję.
Czy osiąga ona dolne ograniczenie Craméra-Rao?

4. Procesy stochastyczne.

Pojęcia, fakty: klasyfikacja procesów stochastycznych *(procesy gaussowskie, procesy stacjonarne w szerszym sensie, procesy stacjonarne i o przyrostach stacjonarnych, procesy o przyrostach niezależnych, procesy Markowa)*, łańcuchy Markowa i procesy Markowa w czasie ciągłym z przeliczalna przestrzenia stanów *(klasyfikacja stanów, rozkład stacjonarny, twierdzenia ergodyczne)*, proces urodzin i śmierci, proces Poissona, złożony proces Poissona, proces odnowy, proces Wienera *(podstawowe własnosci trajektorii, mocna własność Markowa, zasada odbicia).*

Przykładowe zadania:

14. Niech $S=\{1,\ldots,m\}$, a P będzie macierzą podwójnie stochastyczną tj. macierzą stochastyczną taką, że dla wszystkich $j=1,\ldots,m$

$$\sum_{i=1}^{m} p_{ij}=1.$$

Udowodnić, że rozkład $\pi_i \equiv \frac{1}{m}$, $i=1,\ldots,m$, jest rozkładem stacjonarnym dla łańcucha Markowa z macierzą przejść P.

15. Niech $\{N(t),t\geqslant 0\}$ będzie procesem odnowy generowanym przez ciąg niezależnych, jednakoworozłożonych zmiennych losowych $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$. Niech $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciąg niezależnych, jednakoworozłożonych zmiennych losowych takim, że pary (X_n,R_n), $n\geqslant 1$ są niezależne i jednakowo rozłożone. Niech $\{R(t),t\geqslant 0\}$ będzie procesem zdefiniowanym jako

$$R(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} X_n.$$

Wykazać, że z prawdopodobieństwem 1 istnieje granica $\lim_{t\to\infty}\frac{R(t)}{t}$ oraz podać jej postać.

16. Niech $\{N(t),t\geqslant 0\}$ będzie procesem Poissona z parametrem λ. Obliczyć $P(N(s)=k|N(t)=n)$ dla $s<t$.

17. Niech $\{W_t,t\geqslant 0\}$ będzie procesem ruchu Browna. Wykazać, że proces $\{X_t,t\geqslant 0\}$ zdefiniowany, dla ustalonego $T>0$, jako
$X_t=W_{T+t}-W_T$, jest również procesem ruchu Browna.

Specjalność ekonomiczna.

1. Matematyka ubezpieczeń na życie.

Pojęcia, fakty: obecna wartość, zakumulowana wartość, renta bezterminowa i pewna, prawa umieralności, tablice trwania życia, hipoteza jednostajności, ubezpieczenie na całe życie i terminowe i na całe życie, ubezpieczenie na dożycie, renta życiowa na całe życie i terminowa, jednorazowa składka netto i składka roczna, rezerwa netto.

Umiejętności: wyliczenie wartości kapitału w dowolnej chwili czasu, wyliczenie prawdopodobieństwa zgonu na podstawie tablicy trwania życia, wyliczenie składki netto dla prostych typów ubezpieczeń na podstawie tablicy trwania życia i przy zadanym rozkładzie długości życia, wyliczenie składek dla rent, liczenie rezerw.

Przykładowe zadania:

1. Na podstawie tablicy trwania życia TTŻ-PL97m obliczyć jednorazową składkę netto w ubezpieczeniu:
a) terminowym na 2 lata dla 30-latka,
b) czystym na dożycie na 2 lata dla 30-latka,
c) na dożycie na 2 lata dla 30-latka,
d) na całe życie dla 108-latka.

2. Korzystając z tablic trwania życia, przy rocznej stopie procentowej $i = 4\%$, obliczyć *jednorazową składkę netto czasowej renty na życie,* na 3 lata dla osoby w wieku $x = 40$, wypłacanej w wysokości $C = 1000$ na początku każdego roku życia.

3. Przepływy pieniądza pewnej inwestycji są następujące:
1 rok -2420,
2 rok 1460,
4 rok 2140.
Obliczyć wartość obecną i przyszłą po czterech latach tego przepływu pieniędzy przy nominalnej stopie procentowej $i = 20\%$ i kapitalizacji rocznej.

2. Matematyka ubezpieczeń majątkowych i osobowych.

Pojęcia, fakty: funkcja użyteczności, kontrakt stop-loss,składki netto, wariancji, odchylenia standardowego, reasekuracyjna, rozkład sumy niezależnych szkód, złożony rozkład Poissona, złożony rozkład geometryczny, prawdopodobieństwo ruiny w model Lundberga.

Umiejętności: wyliczanie składek dla zadanej funkcji użyteczności i zadanego rozkładu szkód, wyliczanie rozkładu sumy szkód, wyliczanie momentów rozkładów złożonych, wyliczanie prawdopodobieństwa ruiny w modelu Lundberga.

Przykładowe zadania:

4. Wykres funkcji użyteczności decydenta przejawiającego awersję do ryzyka przechodzi przez punkty (0,0), (1,1), $(x,2.5)$, (9,3), i (13,3.5). Jakie wartości może przyjąć parametr x?

5. Przy założeniu, że S ma złożony rozkład Poissona z parametrem $\lambda = 2$, a wielkość szkód jest zadana przez rozkład o gestości $p(k) = \frac{k}{10}$, $k = 1,2,3,4$ obliczyć prawdopodobieństwo sumarycznych szkód $P(S = k)$ dla $k = 0,1,2,3,4$.

6. Ryzyko X ma rozkład z atomami $Pr(X = 0) = 0.8$, $Pr(X = 1) = 0.1$ oraz gęstość $f_X(x) = 0.1$ dla $x \in (0,1)$. Ryzyko Y ma rozkład z atomami $Pr(Y = 0) = 0.7$, $Pr(Y = 2) = 0.1$ i gęstością $f_Y(y) = 0.1$ dla $y \in (0,2)$. Jeśli X i Y są niezależne, to ile wynosi $Pr(X + Y \in [1,2])$?

7. Ryzyko X ma rozkład

x	0	1	2	5	10	20
Pr(X=x)	0.8	0.1	0.03	0.03	0.03	0.01

Wyznaczyć d, jeśli wiadomo, że $E(I_d(X)) = 0.37$, gdzie $I_d(x) = x - d$ dla $x > d$ i zero poza tym.

3. Statystyka.

Pojęcia, fakty: szereg rozdzielczy, histogram, estymatory, estymatory nieobciążone, metoda momentów, metoda największej wiarogodności, estymacja przedziałowa, przedziały ufności dla parametrów rozkładu normalnego, przedziały ufności dla oszacowania prawdopodobieństwa zdarzenia, hipoteza zerowa i alternatywna, hipoteza prosta i złożona, obszar krytyczny, błąd I i II rodzaju, rozmiar testu, poziom istotności, testy ilorazu wiarogodności, test dla wartości średniej w populacji o rozkładzie normalnym, test porównaia średnich, test dla wariancji, test zgodności χ^2, test niezależności χ^2, test t-Studenta, regresja liniowa i metoda najmniejszych kwadratów, współczynnik korelacji i testowanie jego istotności.

Przykładowe zadania:

8. Rzucamy monetą tak długo, aż wypadnie orzeł. Orzeł pojawił się po n rzutach. Znaleźć estymator największej wiarygodności dla nieznanego prawdopodobieństwa wypadnięcia orła.

9. Znaleźć przedział ufności na poziomie ufności 0.99 dla wartości oczekiwanej w rozkładzie normalnym, gdy na podstawie 25 obserwacji oszacowano wartość średnią i odchylenie standardowe.

10. W sondażu brało udział 100 ankietowanych. 48 ankietowanych, stwierdziło, że w najbliższych wyborach prezydenckich będzie głosować na kandydata "X". Zweryfikować hipotezę, że kandydat "X" będzie miał 50% poparcia przeciwko hipotezie, że będzie miał poparcie mniejsze niż 50%.

11. Ile należy wykonać pomiarów, aby oszacować z dokładnością do 0.1 i na poziomie ufności 0.95 średnią w rozkładzie normalnym z odchyleniem standardowym $\sigma = 2$?

12. W USA średnia liczba dni pracy opuszczonych w ciągu roku z powodu choroby wynosi 5.1. W firmie zatrudniającej 49 pracowników średnia liczba dni straconych z powodu choroby wyniosła 7 dni, a odchylenie standardowe 2.5 dnia. Właściciel firmy chce sprawdzić, czy pracownicy w jego firmie odbiegają od typowych w całym kraju.
a) Jaką powinien sformuować hipotezę zerową?

b) Obliczyć poziom krytyczny dla tej hipotezy, zakładając, że obserwacje mają rozkład normalny.
c) Jaki wniosek może wyciągnąć właściciel po przeprowadzeniu tego testu?

4. Równania różniczkowe.

Zakres materiału identyczny jak dla sekcji zastosowań.

5. Wstęp do teorii podejmowania decyzji.

Pojęcia, fakty: kryteria optymalności strategii, gry wieloosobowe, macierzowe gry dwuosobowe, twierdzenie minimaksowe, zagadnienie dualne, metoda simpleks.

Umiejętności: umiejętność znalezienia strategi optymalnej oraz wartości gry w grach macierzowych, umiejętność rozwiązania zagadnienia programowania liniowego oraz zagadnienia dualnego.

Przykładowe zadania:

13. Znaleźć strategie optymalne obu graczy i wartość gry w grze o macierzy wypłat

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14. Wektor $x=(0,5,2,0,0)$ jest rozwiązaniem optymalnym zagadnienia programowania liniowego:

$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\geqslant 0;$$

$$\begin{aligned} x_1+2x_3-x_4+4x_5 &\geqslant 4 \\ 2x_1+2x_2+x_4+3x_5 &\geqslant 10 \\ 3x_2-2x_3-x_4+2x_5 &\geqslant 7 \end{aligned}$$

$$3x_1+x_2+2x_3+4x_4+6x_5=\min.$$

a) napisać postać zagadnienia dualnego do tego zagadnienia,
b) znaleźć rozwiązanie optymalne zagadnienia dualnego.

Specjalność: matematyka z informatyką.

0. Studia na sekcji przygotowują do praktycznego posługiwania się narzędziami informatycznymi począwszy od systemów operacyjnych **Windows** i **Linux**, języków programowania **C++**, **Pascal**, **Perl** poprzez pakiety matematyczne **MathLab**, **Mathematica** czy **Statistica**. Całość jest osadzona w zajęciach teoretycznych, gdzie przedstawia się zgadnienia istotne dla świadomego a przede wszystkim skutecznego stosowania poznanej wiedzy. Cechą wyróżniającą absolwentów tej sekcji jest, na bazie przygotowania matematycznego, umiejętność krytycznej analizy programów służących do wykonywania obliczeń.

1. Metody programowania.

Pojęcia, fakty: programowanie strukturalne i obiektowe, posługiwanie się wskaźnikami, listy, rekurencja, tworzenie klas, niskopoziomowe (buforowane lub nie) operacje wejścia wyjścia, strumienie, komunikaty, łącza, pamięć dzielona, procesy, synchronizacja dostępu do zasobów, uprawnienia

Umiejętności: praktyczne przygotowanie do zawodu programisty

Przykładowe zadania:

1. Rozważmy PASCALOWSKI fragment programu:

```
var i,j : integer;

procedure P(var k : integer;var m : integer);
begin
  k := k-m;
  m := k+m;
  k := m-k;
end;

i := 2;
j := 3;
P(i,j);
```

Jakie są wartości `i,j` po wykonaniu przedstawionego fragmentu programu?

2. Niech będzie dany program:

```
#include <stdio.h>
int main()
{
   float sum=0.0,j=1.0,i=2.0;

   while(i/j>0.001)
   {
      j = j+j;
      sum = sum + i/j;
      printf("%12.4f\n",sum);
   }
   return 0;
}
```

Ile wierszy wygeneruje program ?

3. Niech będzie dana definicja *listy liniowej*:

```
type ref=^slowo;
  slowo = record
            klucz   : integer;
            licznik : integer;
            nast    : ref;
          end;
```

Napisać procedurę:

- tworzącą listę długości `n`.
- znajdującą zadany klucz.

4. Przeciążając operator `+` rozszerzyć dodawanie liczb na dodawanie macierzy `2 x 2`.

2. Metody numeryczne I.

Pojęcia, fakty: rozwiązywanie równań nieliniowych metodą *"przez połowienie przedziału", stycznych (Newtona), siecznych* – określenie rzędu metody; błędy zaokrągleń popełniane w obliczeniach numerycznych, ε – maszynowe, rozmieszczenie liczb zmiennoprzecinkowych, rodzaje błędów; metody algebry liniowej: przedstawienie macierzy w komputerze, `LU` – rozkład macierzy; rozwiązywanie układu równań przez rozkład *Choleskiego*, metoda eleminacji *Gaussa*; oszacowanie błędu rozwiązań, macierze źle uwarunkowane; interpolacja wielomianowa, błąd interpolacji, wilomiany *Czebyszewa*; numeryczne całkowanie, wzór trapezów, formuła Newton–Cotes, wzór Simpsona, kwadratury Gaussa.

Umiejętności: zapoznanie z elementarnymi zagadnieniami analizy numerycznej, celem w przyszłości jest kształcenie specjalistów łączących wiedzę matematyczną z umiejętnością "czytania" programów realizujących obliczenia, umiejących ze zrozumieniem analizować algorytmy numeryczne

Przykładowe zadania:

5. Dla równania

$$x^2 = 2$$

i warunku początkowego

$$x_0 = 10$$

ile należy wykonać iteracji w metodzie *Newtona*, aby otrzymać przybliżone rozwiązanie z błędem absolutnym mniejszym od 0.00001 ?

6. Dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

obliczyć współczynnik dobrego uwarunkowani $\kappa(A)$. Wyjaśnić znaczenie tej liczby.

3. Statystyka.

Zakres materiału identyczny jak dla sekcji ekonomicznej.

4. Równania różniczkowe.

Zakres materiału identyczny jak dla sekcji zastosowań.