Instytut Matematyczny
Uniwersytet Wrocławski

Zakres egzaminu magisterskiego

Wybrane rozdziały anazlizy i topologii 1 i 2

Pojęcia, fakty: Definicje i pojęcia: metryka, iloczyn skalarny, norma supremum, norma całkowa, zbiór otwarty, domknięty, ograniczony, zwarty, średnica zbioru, zbieżność punktowa i jednostajna ciągu funkcyjnego, zbieżność w metryce całkowej, odległość punktu od zbioru, ciągłość funkcji, aproksymacja funkcji ciągłych wielomianami, twierdzenie Stone'a-Weierstrassa, szeregi potęgowe, promień zbieżności szeregu, obszar zbieżności, twierdzenie Cauchy'ego-Riemanna, całka krzywoliniowa, funkcje holomorficzne, funkcje całkowite, wzór całkowy Cauchy'ego, residuum, osobliwość pozorna, biegun, osobliwość istotna, funkcja skończenie addytywna, miara Lebesgue'a, zbiory miary zero, całka Lebesgue'a

Przykładowe zadania:

1. Sprawdzić, czy funkcja $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ określona wzorem
$$d(n, m) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|$$
jest metryką.

2. Niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem funkcyjnym określonym na $\mathbb{R}_+$ następująco:
$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x & \text{dla } x \in [0, \frac{1}{n}], \\ -n^2x + 2n & \text{dla } x \in (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], \\ 0 & x > \frac{2}{n}. \end{cases}$$
Zbadać zbieżność punktową i jednostajną na $\mathbb{R}_+$ oraz w metryce całkowej L^1 na przedziale $[0, 2]$.

3. Wyznaczyć obszar zbieżności (promień oraz zbadać zachowanie na

brzegu) szeregu
$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{n}.$$

4. Wykazać, że jeśli funkcja $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$ jest analityczna w pewnym obszarze D oraz $u^2 = v$ w tym obszarze, to funkcja f musi być stała.

5. Przy pomocy twierdzenia Cauchy'ego obliczyć całkę:
$$\int_\gamma \frac{e^z}{z(1-z)^3},$$
gdzie $\gamma(t)$ jest okręgiem o środku w punkcie 0 i promieniu $\frac{1}{2}$.

6. Obliczyć całkę
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x - 2}{x^4 + 10x^2 + 9}\, dx.$$

7. Pokazać, że norma supremum w przestrzeni $C[0,1]$ (funkcje ciągłe na odcinku $[0,1]$) nie spełnia warunku równoległoboku.

8. Pokazać, że miara Lebesgue'a zbioru jednopunktowego jest równa zero.

Algebra

Pojęcia, fakty: przestrzenie liniowe, baza i wymiar, odwzorowanie liniowe, funkcjonały i formy kwadratowe, formy hermitowskie, twierdzenie Sylvestera, przestrzenie unitarne, endomorfizmy samosprzężone, wartości i wektory własne, diagonalizacja, grupy pierścienie i ciała, podgrupy i twierdzenie Lagrange'a, podgrupy normalne i ideały, grupy i pierścienie ilorazowe, homomorfizmy, centrum, komutant, struktura grup abelowych skończenie generowalnych, pierścień liczb całkowitych i pierścienie wielomianów jednej zmiennej, algorytm Euklidesa i teoria podzielności w pierścieniach euklidesowych, ciała proste.

Przykładowe zadania:

9. Podać przykłady czterech parami nieizomorficznych grup rzędu 8 wraz z uzasadnieniem ich nieizomorficzności.

10. Znaleźć centrum w grupie nieosobliwych macierzy rzeczywistych 2×2.

11. Znaleźć bazę ortonormalną w przestrzeni $P_2[-1,1]$ wielomianów rzeczywistych stopnia $\leqslant 2$ na przedziale $[-1,1]$, z iloczynem skalarnym

$$\langle f_1, f_2\rangle = \int_{-1}^{1} f_1(x) f_2(x) dx.$$

Podać przykład jakiegoś unitarnego automorfizmu tej przestrzeni.

12. Uzasadnić, że podzbiór I_x w pierścieniu funkcji ciągłych $C[0,1]$ składający się z wszystkich funkcji f zerujących się w punkcie $x \in [0,1]$, jest ideałem maksymalnym w tym pierścieniu.

13. Podać definicję największego wspólnego dzielnika w dowolnym pierścieniu. Z jaką dokładnością jest on określony? Uzasadnić, że jeśli elementy a, b mają największy wspólny dzielnik, to mają go też elementy $a, a+b$.

Analiza wielu zmiennych i rozmaitości różniczkowalne

Pojęcia, fakty: pochodne cząstkowe i różniczka funkcji wielu zmiennych, twierdzenia o funkcji uwikłanej i o rzędzie, ekstrema funkcji wielu zmiennych, ekstrema warunkowe, całka wielowymiarowa i całka wielokrotna, zamiana zmiennych, równania parametryczne krzywych i powierzchni, całki powierzchniowe i twierdzenie Greena, długość i krzywizna krzywej, pole powierzchni, rozmaitości, funkcje i odwzorowania gładkie na rozmaitościach, dyfeomorfizmy, podrozmaitości, wiązka styczna, metryka Riemanna i długość krzywej na rozmaitości.

Przykładowe zadania:

14. Wśród trójkątów o ustalonym polu powierzchni znaleźć ten, który ma najmniejszy obwód.

15. Dana jest krzywa regularna $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^2$ oraz punkt A nie leżący na tej krzywej. Uzasadnić, że jeśli $\gamma(t_0)$ jest punktem tej krzywej leżącym najbliżej punktu A, to odcinek $A\gamma(t_0)$ jest prostopadły do stycznej krzywej γ w punkcie $\gamma(t_0)$.

16. Niech X będzie polem wektorowym na $\mathbb{R}^2$ równym gradientowi różniczkowalnej funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, i niech $\gamma(t)$ będzie rozwiązaniem równania różniczkowego $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$ o warunku początkowym $\gamma(0) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Uzasadnić, że dla dowolnego t z przedziału określoności rozwiązania γ zachodzi równość $f(\gamma(t)) = f(x_0, y_0) + t$.

17. Obliczyć pole odcinka sfery o promieniu r zawartego pomiędzy pewną płaszczyzną styczną do tej sfery a równoległą do niej płaszczyzną leżącą po tej samej stronie, co sfera, w odległości $d < r$ od tej płaszczyzny stycznej.

Analiza funkcjonalna

Pojęcia, fakty: normy, normy w przestrzeniach funkcyjnych, operatory liniowe ograniczone, przestrzeń Banacha, twierdzenie o operatorze odwrotnym, twierdzenie Banacha-Steinhausa, funkcjonały, twierdzenie Hahna-Banacha, przestrzenie Hilberta, ortogonalność, twierdzenie Riesza o funkcjonale.

Przykładowe zadania:

18. Znaleźć wzorem izomorfizm przestrzeni Hilberta $L^2[0,1]$ i $L^2[0,2]$. Znaleźć też wzorem izometrię przestrzeni Hilberta $L^2[0,1]$ na swój właściwy podzbiór.

19. Podać wraz z uzasadnieniem przykład operatora ograniczonego na przestrzeni Hilberta, którego obraz nie jest podprzestrzenią domkniętą.

20. Uzasadnić, że jeżeli złożenie dwóch operatorów ograniczonych na przestrzeni Banacha jest operatorem odwracalnym, to każdy ze składowych operatorów jest odwracalny.

Rachunek różniczkowy

Pojęcia, fakty: kresy zbiorów, zbieżność ciągów i szeregów, zbieżność warunkowa, zbieżność bezwzględna, granice górne i dolne, ciągi i szeregi funkcyjne, zbieżność jednostajna, pochodna i wzór Taylora, szeregi potęgowe, całka, twierdzenie Stone'a-Weierstrassa, równania różniczkowe zwyczajne w dowolnym wymiarze, istnienie i jednoznaczność rozwiązań, gładka zależność od warunków początkowych oraz od parametrów, przedłużalność rozwiązań, równania zwyczajne liniowe o stałych współczynnikach, równania różniczkowe cząstkowe: równanie falowe (konstrukcja rozwiązania ogólnego, rozwiązanie zagadnienia początkowego), równanie ciepła, metoda Fouriera rozdzielania zmiennych.

Przykładowe zadania:

21. Uzasadnić, że jeśli ciąg dodatni (a_n) monotonicznie zbiega do zera, to szereg naprzemienny $\sum(-1)^n a_n$ jest zbieżny.

22. Uzasadnić, że podzbiór funkcji kawałkami liniowych jest gęsty w przestrzeni funkcji ciągłych $C[0,1]$ z metryką jednostajną.

23. Posługując się wzorem Taylora i szacując w nim resztę znaleźć przybliżenie liczby $\ln 2$ z dokładnością $\frac{1}{10}$.

24. Podać przykład ciągłego pola wektorowego na $\mathbb{R}^2$, którego trajektorie nie są określone dla każdego $t \in \mathbb{R}$, oraz takiego, dla którego trajektorie wychodzące z ustalonego punktu nie są jednoznaczne.

25. Rozważmy teoretyczny model, w którym ciało opadające swobodnie w wodzie podlega tarciu proporcjonalnemu do prędkości opadania. Ułożyć i rozwiązać równanie różniczkowe dające opis ruchu takiego ciała.

26. We współrzędnych geograficznych na sferze znaleźć równanie linii przecinającej południki pod stałym kątem.

27. Rozdzielając zmienne rozwiązać równanie $tu_t = u_{xx} + 2u$ z warunkami brzegowymi $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$. Udowodnić, że równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań spełniających warunek początkowy $u(x,0) = 0$.

Funkcje rzeczywiste i funkcje analityczne

Pojęcia, fakty: σ-ciała, miara Lebesgue'a, funkcje mierzalne, całka Lebesgue'a, twierdzenia o przechodzeniu do granicy pod całką, miary produktowe, twierdzenie Fubiniego, równania Cauchy-Riemanna, całki zespolone, wzór Cauchy'ego, rozwijanie w szereg potęgowy, funkcje całkowite, zasada maksimum, bieguny i residua.

Przykładowe zadania:

28. Podać wraz z uzasadnieniem przykład nieprzeliczalnego zbioru miary zero na prostej rzeczywistej.

29. Uzasadnić, że obraz różniczkowalnej krzywej regularnej w $\mathbb{R}^2$ (tzn. takiej, której wektor styczny w każdym punkcie jest niezerowy) ma miarę zero.

30. Niech Ω będzie otwartym obszarem w $\mathbb{C}$, zaś $f : \Omega \to \mathbb{C}$ niech będzie różnowartościową funkcją holomorficzną taką, że $f'(z) \neq 0$ dla każdego $z \in \Omega$. Uzasadnić, że miara Lebesgue'a zbioru $f(\Omega)$ wyraża się wzorem

$$|f(\Omega)| = \int_{\Omega} |f'(z)|^2 dx\, dy,$$

gdzie $z = x + iy$.

31. Uzasadnić, że miejsca zerowe funkcji analitycznej f, nierównej tożsamościowo zeru, są punktami izolowanymi.

32. Uzasadnić, że jeśli $f : \Omega \to \mathbb{C}$ jest funkcją analityczną taką, że $f'(z) \neq 0$ dla każdego $z \in \Omega$, to obraz $f(U)$ dowolnego otwartego podzbioru $U \subset \Omega$ jest zbiorem otwartym.

Rachunek prawdopodobieństwa

Pojęcia, fakty: prawdopodobieństwo z użyciem kombinatoryki, schemat Bernoulliego, prawdopodobieństwo warunkowe, niezależność, zmienne losowe dyskretne i ciągłe, wartość oczekiwana, rozkłady zmiennych losowych, momenty i wariancja, funkcja tworząca, nierówność Czebyszewa i słabe prawo wielkich liczb, centralne twierdzenie graniczne.

Przykładowe zadania:

33. Momenty przybycia autobusów A i B są niezależnymi zmiennymi losowymi X i Y o rozkładach wykładniczych z parametrami α i μ.

(a) Znaleźć rozkład momentu przybycia pierwszego autobusu.

(b) Obliczyć prawdopodobieństwo, że autobus A przyjedzie pierwszy.

34. Udowodnić, że jeśli ciąg zmiennych losowych X_n jest zbieżny w L^2, to ciąg X_n^2 jest zbieżny w L^1.

35. Niech $(X_k : k \in \mathbb{N})$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowych rozkładach wykładniczych.

(a) Znaleźć rozkłady zmiennych $X_1 + \ldots + X_n$, dla dowolnego n.

(b) Dla ustalonej liczby $t \geqslant 0$ rozważmy zmienną losową

$$N_t = \max\{n : X_1 + \ldots + X_n \leqslant t\}.$$

Znaleźć rozkład zmiennej losowej N_t. Jaki to rozkład?

36. Udowodnić, że jeśli X_n jest ciągiem zmiennych losowych o wspólnie ograniczonych wariancjach oraz o współczynnikach korelacji $\rho(X_i, X_j) \to 0$, gdy $|i - j| \to \infty$, to ciąg ten spełnia słabe prawo wielkich liczb.

37. Rozważmy ciąg niezależnych rzeczywistych zmiennych losowych (X_n) o średnich m_n i wariancjach σ_n^2 takich, że $0 < a_1 \leqslant \sigma_n^2 \leqslant a_2$,

$$0 < b_1 \leqslant E|X_n - m_n|^3 \leqslant b_2$$

dla pewnych stałych a_1, a_2, b_1, b_2. Czy dla tego ciągu jest spełnione centralne twierdzenie graniczne?

Topologia i teoria mnogości

Pojęcia, fakty: relacje równoważności oraz częściowego i liniowego porządku, moc zbioru, przeliczalność i moc continuum, dobre porządki i indukcja pozaskończona, przestrzenie metryczne, odwzorowania ciągłe, zupełność, zwartość, spójność, drogowa spójność, ośrodkowość, metryki równoważne, przestrzenie topologiczne, topologia produktowa, topologia ilorazowa, topologia indukowana na podzbiór, homeomorfizm, zbiory nigdziegęste i twierdzenie Baire'a.

Przykładowe zadania:

38. Uzasadnić, że każdy otwarty podzbiór prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$ jest przeliczalną sumą otwartych parami rozłącznych przedziałów.

39. Uzasadnić, że następujące przestrzenie topologiczne nie są homeomorficzne: $[0,1]$, $\mathbb{R}$, $[0,1] \times [0,1]$, $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, $[0,1] \times \mathbb{Q}$, zbiór Cantora, $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$.

40. Czy przestrzeń $C^1[0,1]$ różniczkowalnych w sposób ciągły funkcji rzeczywistych z normą $\|f\| = \sup(|f|) + \sup(|f'|)$ jest: zupełna, zwarta, spójna, ośrodkowa? Odpowiedzi uzasadnić.

41. Na płaszczyźnie dany jest ograniczony zbiór B zawierający przynajmniej dwa punkty. Uzasadnić, że wśród kół domkniętych zawierających zbiór B istnieje koło o najmniejszym promieniu, oraz że koło o tej własności jest jedyne.

42. Uzasadnić, że obraz różniczkowalnej krzywej regularnej na płaszczyźnie nie może być całą płaszczyzną. Zastosować twierdzenie Baire'a.