Instytut Matematyczny
Uniwersytet Wrocławski

Zakres egzaminu magisterskiego

Wybrane rozdziały anazlizy i topologii 1 i 2

Pojęcia, fakty: Definicje i pojęcia: metryka, iloczyn skalarny, norma supremum, norma całkowa, zbiór otwarty, domknięty, ograniczony, zwarty, średnica zbioru, zbieżność punktowa i jednostajna ciągu funkcyjnego, zbieżność w metryce całkowej, odległość punktu od zbioru, ciągłość funkcji, aproksymacja funkcji ciągłych wielomianami, twierdzenie Stone'a-Weierstrassa, szeregi potęgowe, promień zbieżności szeregu, obszar zbieżności, twierdzenie Cauchy'ego-Riemanna, całka krzywoliniowa, funkcje holomorficzne, funkcje całkowite, wzór całkowy Cauchy'ego, residuum, osobliwość pozorna, biegun, osobliwość istotna, funkcja skończenie addytywna, miara Lebesgue'a, zbiory miary zero, całka Lebesgue'a

Przykładowe zadania:

1. Sprawdzić, czy funkcja $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ określona wzorem
$$d(n, m) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|$$
jest metryką.

2. Niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem funkcyjnym określonym na $\mathbb{R}_+$ następująco:
$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x & \text{dla } x \in [0, \frac{1}{n}], \\ -n^2x + 2n & \text{dla } x \in (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], \\ 0 & x > \frac{2}{n}. \end{cases}$$
Zbadać zbieżność punktową i jednostajną na $\mathbb{R}_+$ oraz w metryce całkowej L^1 na przedziale $[0, 2]$.

3. Wyznaczyć obszar zbieżności (promień oraz zbadać zachowanie na brzegu) szeregu

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{n}.$$

4. Wykazać, że jeśli funkcja $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$ jest analityczna w pewnym obszarze D oraz $u^2 = v$ w tym obszarze, to funkcja f musi być stała.

5. Przy pomocy twierdzenia Cauchy'ego obliczyć całkę:

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z(1-z)^3},$$

gdzie $\gamma(t)$ jest okręgiem o środku w punkcie 0 i promieniu $\frac{1}{2}$.

6. Obliczyć całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x - 2}{x^4 + 10x^2 + 9}\, dx.$$

7. Pokazać, że norma supremum w przestrzeni $C[0,1]$ (funkcje ciągłe na odcinku $[0,1]$) nie spełnia warunku równoległoboku.

8. Pokazać, że miara Lebesgue'a zbioru jednopunktowego jest równa zero.

Statystyka

Pojęcia, fakty: estymacje punktowe i przedziałowe, testowanie hipotez w rozkładzie normalnym, test χ^2 zgodności

Przykładowe zadania:

9. W celu sprawdzenia, czy pewna kostka do gry jest symetryczna, rzucono ją 100 razy i otrzymano następujące wyniki:

liczba oczek	1	2	3	4	5	6
liczba rzutów	10	8	15	24	18	25

Sprawdzić hipotezę, że kostka jest symetryczna.

10. W sondażu przedwyborczym wzięło udział 1600 respondentów. Spośród nich 800 osób oświadczyło, że będzie głosować na partię "X". Oszacować na poziomie ufności 95% przedział ufności dla prawdopodobieństwa poparcia tej partii wśród **wszystkich** wyborców.

Arytmetyka i teoria liczb

Pojęcia, fakty: układy pozycyjne, rozwinięcia dziesiętne, indukcja, ułamki łańcuchowe, kongruencje, równania diofantyczne, tw. Eulera: $(a, n) = 1 \Rightarrow a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$, liczby pierwsze

Przykładowe zadania:

11. Podać rozwinięcie dziesiętne (wskazując okres) liczby:
a) $1,23(574) + 2,(6878)$, **b)** $1,23(574) - 2,(6878)$, **c)** $1,23(574) + \frac{3}{11} - \frac{5}{7}$.

12. Znaleźć dwie cyfry po przecinku rozwinięcia dwójkowego $\sqrt{3}$.

13. Czy $7^{103} \equiv 5 \pmod{27}$?

14. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $2x + 7y = 10$ w liczbach całkowitych.

15. Uzasadnić, że jeśli $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (p-1) \equiv -1 \pmod{p}$ i $p > 1$, to p jest liczbą pierwszą.

16. Ile dzielników naturalnych ma liczba
a) $11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$ **b)** $2^{11} \cdot 3^{13} \cdot 5^{17} \cdot 7^{19}$ **c)** $120^3 \cdot 98$

17. Uzasadnić, że dla każdej liczby naturalnej $n > 2$ istnieje liczba pierwsza p większa od n i mniejsza od n^n.
(Wskazówka: skorzystać z idei dowodu Euklidesa twierdzenia o tym, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.)

18. Ile jest ułamków nieskracalnych postaci $\frac{n}{1000}$, gdzie $1 \leqslant n < 1000$?

19. Uzasadnić niewymierność liczby

$$x = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \ldots}}}}$$

Czy jest to liczba algebraiczna?

Geometria elementarna I, II
Konstrukcje geometryczne

Pojęcia, fakty: elementarne własności trójkątów, wielokątów, tw. Cevy, locus, klasyfikacja izometrii i podobieństw płaszczyzny, stożkowe, wielościany platońskie, archimedesowskie, podstawowe konstrukcje platońskie

Przykładowe zadania:

20. Uzasadnić, że jeśli czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, to
$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA| = |AC| \cdot |BD|.$$

21. W pewnej izometrii płaszczyzny obrazem punktu $A = (1, 2)$ jest punkt $A' = (5, 8)$, punktu $B = (3, 0)$ – punkt $B' = (3, 10)$, a punktu $C = (0, 0)$ – punkt $C' = (6, 10)$.
a) Przedstawić tę izometrię jako złożenie symetrii osiowych.
b) Podać opis tej izometrii jako przekształcenia w zbiorze liczb zespolonych.

22. Niech A będzie punktem paraboli o ognisku O i kierownicy k. Niech ℓ oznacza symetralną odcinka OA', gdzie A' jest rzutem prostokątnym punktu A na prostą k. Uzasadnić, że parabola zawarta jest w półpłaszczyźnie wyznaczonej przez prostą ℓ i punkt O.

23. Podać konstrukcję dziesięciokąta foremnego.

24. Zakładając, że dane są odcinki o długościach a, b i c oraz odcinek jednostkowy podać konstrukcję odcinka o długości $\frac{ab}{c} + \sqrt{bc+1}$.

25. Niech dany będzie okrąg $o(S, r)$ i punkt A leżący wewnątrz tego okręgu. Znaleźć miejsce geometryczne punktów X takich, że odległość AX jest równa odległości punktu X od danego okręgu.
(Podać również rozwiązanie analityczne.)

26. Uzasadnić (korzystając ze wzoru Eulera), że nie istnieje wielościan wypukły, którego **każda** ściana jest siedmiokątem.