Instytut Matematyczny
Uniwersytet Wrocławski

Zakres egzaminu magisterskiego

Studia na sekcji przygotowują do praktycznego posługiwania się narzędziami informatycznymi począwszy od systemów operacyjnych **Windows** i **Linux**, języków programowania **C++**, **Pascal**, **Perl** poprzez pakiety matematyczne **MathLab**, **Mathematica** czy **Statistica**. Całość jest osadzona w zajęciach teoretycznych, gdzie przedstawia się zgadnienia istotne dla świadomego, a przede wszystkim skutecznego stosowania poznanej wiedzy. Cechą wyróżniającą absolwentów tej sekcji jest, na bazie przygotowania matematycznego, umiejętność krytycznej analizy programów służących do wykonywania obliczeń.

Wybrane rozdziały anazlizy i topologii 1 i 2

Pojęcia, fakty: Definicje i pojęcia: metryka, iloczyn skalarny, norma supremum, norma całkowa, zbiór otwarty, domknięty, ograniczony, zwarty, średnica zbioru, zbieżność punktowa i jednostajna ciągu funkcyjnego, zbieżność w metryce całkowej, odległość punktu od zbioru, ciągłość funkcji, aproksymacja funkcji ciągłych wielomianami, twierdzenie Stone'a-Weierstrassa, szeregi potęgowe, promień zbieżności szeregu, obszar zbieżności, twierdzenie Cauchy'ego-Riemanna, całka krzywoliniowa, funkcje holomorficzne, funkcje całkowite, wzór całkowy Cauchy'ego, residuum, osobliwość pozorna, biegun, osobliwość istotna, funkcja skończenie addytywna, miara Lebesgue'a, zbiory miary zero, całka Lebesgue'a

Przykładowe zadania:

1. Sprawdzić, czy funkcja $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ określona wzorem
$$d(n,m) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|$$
jest metryką.

2. Niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem funkcyjnym określonym na $\mathbb{R}_+$ następująco:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x & \text{dla } x \in [0, \frac{1}{n}], \\ -n^2x + 2n & \text{dla } x \in (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], \\ 0 & x > \frac{2}{n}. \end{cases}$$

Zbadać zbieżność punktową i jednostajną na $\mathbb{R}_+$ oraz w metryce całkowej L^1 na przedziale $[0, 2]$.

3. Wyznaczyć obszar zbieżności (promień oraz zbadać zachowanie na brzegu) szeregu

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{n}.$$

4. Wykazać, że jeśli funkcja $f(z) = u(x; y) + iv(x; y)$ jest analityczna w pewnym obszarze D oraz $u^2 = v$ w tym obszarze, to funkcja f musi być stała.

5. Przy pomocy twierdzenia Cauchy'ego obliczyć całkę:

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z(1-z)^3},$$

gdzie $\gamma(t)$ jest okręgiem o środku w punkcie 0 i promieniu $\frac{1}{2}$.

6. Obliczyć całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x - 2}{x^4 + 10x^2 + 9}\, dx.$$

7. Pokazać, że norma supremum w przestrzeni $C[0, 1]$ (funkcje ciągłe na odcinku $[0, 1]$) nie spełnia warunku równoległoboku.

8. Pokazać, że miara Lebesgue'a zbioru jednopunktowego jest równa zero.

Metody programowania

Pojęcia, fakty: programowanie strukturalne i obiektowe, posługiwanie się wskaźnikami, listy, rekurencja, tworzenie klas, niskopoziomowe (buforowane lub nie) operacje wejścia wyjścia, strumienie, komunikaty, łącza, pamięć dzielona, procesy, synchronizacja dostępu do zasobów, uprawnienia

Umiejętności: praktyczne przygotowanie do zawodu programisty

Przykładowe zadania:

9. Rozważmy PASCALOWSKI fragment programu:

```
var i,j : integer;
```

```
procedure P(var k : integer;var m : integer);
begin
  k := k-m;
  m := k+m;
  k := m-k;
end;

i := 2;
j := 3;
P(i,j);
```

Jakie są wartości `i,j` po wykonaniu przedstawionego fragmentu programu?

10. Niech będzie dany program:

```
#include <stdio.h>
int main()
{
   float sum=0.0,j=1.0,i=2.0;

   while(i/j>0.001)
   {
      j = j+j;
      sum = sum + i/j;
      printf("%12.4f\n",sum);
   }
   return 0;
}
```

Ile wierszy wygeneruje program ?

11. Niech będzie dana definicja *listy liniowej*:

```
type ref=^slowo;
  slowo = record
            klucz   : integer;
            licznik : integer;
            nast    : ref;
          end;
```

Napisać procedurę:

- tworzącą listę długości `n`.
- znajdującą zadany klucz.

12. Przeciążając operator `+` rozszerzyć dodawanie liczb na dodawanie macierzy 2×2.

Metody numeryczne I

Pojęcia, fakty: rozwiązywanie równań nieliniowych metodą *"przez połowienie przedziału", stycznych (Newtona), siecznych* – określenie rzędu metody; błędy zaokrągleń popełniane w obliczeniach numerycznych, ε – maszynowe, rozmieszczenie liczb zmiennoprzecinkowych, rodzaje błędów; metody algebry liniowej: przedstawienie macierzy w komputerze, `LU` – rozkład macierzy; rozwiązywanie układu równań przez rozkład *Choleskiego*, metoda eleminacji *Gaussa*; oszacowanie błędu rozwiązań, macierze źle uwarunkowane; interpolacja wielomianowa, błąd interpolacji, wilomiany *Czebyszewa*; numeryczne całkowanie, wzór trapezów, formuła Newton–Cotes, wzór Simpsona, kwadratury Gaussa.

Umiejętności: zapoznanie z elementarnymi zagadnieniami analizy numerycznej, celem w przyszłości jest kształcenie specjalistów łączących wiedzę matematyczną z umiejętnością "czytania" programów realizujących obliczenia, umiejących ze zrozumieniem analizować algorytmy numeryczne

Przykładowe zadania:

13. Dla równania

$$x^2 = 2$$

i warunku początkowego

$$x_0 = 10$$

ile należy wykonać iteracji w metodzie *Newtona*, aby otrzymać przybliżone rozwiązanie z błędem absolutnym mniejszym od 0.00001 ?

14. Dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

obliczyć współczynnik dobrego uwarunkowani $\kappa(A)$. Wyjaśnić znaczenie tej liczby.

Statystyka

Pojęcia, fakty: szereg rozdzielczy, histogram, estymatory, estymatory nieobciążone, metoda momentów, metoda największej wiarogodności, estymacja przedziałowa, przedziały ufności dla parametrów rozkładu normalnego, przedziały ufności dla oszacowania prawdopodobieństwa zdarzenia, hipoteza zerowa i alternatywna, hipoteza prosta i złożona, obszar krytyczny, błąd I i II rodzaju, rozmiar testu, poziom istotności, testy ilorazu wiarogodności, test dla wartości średniej w populacji o rozkładzie normalnym, test porównaia średnich, test dla wariancji, test zgodności χ^2, test niezależności χ^2, test t-Studenta, regresja liniowa i metoda najmniejszych kwadratów, współczynnik korelacji i testowanie jego istotności.

Przykładowe zadania:

15. Rzucamy monetą tak długo, aż wypadnie orzeł. Orzeł pojawił się po n rzutach. Znaleźć estymator największej wiarygodności dla nieznanego prawdopodobieństwa wypadnięcia orła.

16. Znaleźć przedział ufności na poziomie ufności 0.99 dla wartości oczekiwanej w rozkładzie normalnym, gdy na podstawie 25 obserwacji oszacowano wartość średnią i odchylenie standardowe.

17. W sondażu brało udział 100 ankietowanych. 48 ankietowanych, stwierdziło, że w najbliższych wyborach prezydenckich będzie głosować na kandydata "X". Zweryfikować hipotezę, że kandydat "X" będzie miał 50% poparcia przeciwko hipotezie, że będzie miał poparcie mniejsze niż 50%.

18. Ile należy wykonać pomiarów, aby oszacować z dokładnością do 0.1 i na poziomie ufności 0.95 średnią w rozkładzie normalnym z odchyleniem standardowym $\sigma = 2$?

19. W USA średnia liczba dni pracy opuszczonych w ciągu roku z powodu choroby wynosi 5.1. W firmie zatrudniającej 49 pracowników średnia liczba dni straconych z powodu choroby wyniosła 7 dni, a odchylenie standardowe 2.5 dnia. Właściciel firmy chce sprawdzić, czy pracownicy w jego firmie odbiegają od typowych w całym kraju.

a) Jaką powinien sformuować hipotezę zerową?

b) Obliczyć poziom krytyczny dla tej hipotezy, zakładając, że obserwacje mają rozkład normalny.

c) Jaki wniosek może wyciągnąć właściciel po przeprowadzeniu tego testu?