Instytut Matematyczny
Uniwersytet Wrocławski

Zakres egzaminu licencjackiego

Analiza

Opanowany materiał szkoły średniej: postęp arytmetyczny i geometryczny, wartość bezwzględna - równania i nierówności, część całkowita i ułamkowa, równania i nierówności kwadratowe, twierdzenie Bézout, funkcje potęgowe, wykładnicze i logarytmiczne, szkicowanie wykresów, rozwiązywanie równań i nierówności wykładniczych i logarytmicznych.

1. Indukcja matematyczna, dwumian Newtona.

Pojęcia, fakty: zasada indukcji matematycznej; dwumian Newtona.

Umiejętności: umiejętność przeprowadzania prostych rozumowań indukcyjnych; rozumienie sytuacji, w których indukcja rozpoczyna się od $n > 1$ lub krok indukcyjny "skacze" o więcej niż 1; umiejętność posługiwania się dwumianem Newtona.

Przykładowe zadania:

1. Dowieść, że dla wszystkich n naturalnych zachodzi równość

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \ .$$

2. Dowieść, że dla wszystkich n naturalnych zachodzi nierówność $100n < 2^n + 577$.

3. Obliczyć $\sum\limits_{k=0}^{n} 3^k \binom{n}{k}$.

2. Liczby wymierne i niewymierne.

Pojęcia, fakty: gęstość liczb wymiernych i niewymiernych; rozwinięcie dziesiętne liczb rzeczywistych.

Umiejętności: znajomość dowodów niewymierności pierwiastków i logarytmów, umiejętność dowodzenia niewymierności prostych wyrażeń zawierających liczby niewymierne, zamiana liczb wymiernych z postaci ułamka zwykłego na ułamek dziesiętny i na odwrót.

Przykładowe zadania:

4. Dowieść, że liczba $\sqrt{3}+\sqrt{6}$ jest niewymierna.

5. Dowieść, że liczba $\log_2 3$ jest niewymierna.

6. Zamienić na ułamek zwykły liczbę $\sqrt{0,(4)}+\sqrt[3]{3,374(9)}$.

3. Ciągi liczbowe, zbieżność.

Pojęcia, fakty: granica ciągu, ciągi monotoniczne, ograniczone, zbieżność, podciąg, warunek Cauchy'ego.

Umiejętności: umiejętność obliczania granic z użyciem wzorów na granice sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu, twierdzenia o trzech ciągach.

Przykładowe zadania:

Rozstrzygnąć zbieżność ciągu i obliczyć granicę, jeśli jest zbieżny

7. $\sqrt{n^2+n}-n$ **8.** $\frac{n^2+1}{n^3+1}+\frac{n^2+2}{n^3+2}+\frac{n^2+3}{n^3+3}+...+\frac{n^2+n}{n^3+n}$

4. Szeregi liczbowe, kryteria zbieżności, liczba e.

Pojęcia, fakty: szereg liczbowy, zbieżność szeregu liczbowego, kryteria zbieżności, liczba e.

Umiejętności: znajomość podstawowych przykładów szeregów zbieżnych i rozbieżnych (szereg harmoniczny, szeregi geometryczne); znajomośc i umiejętność stosowania do rozstrzygania zbieżności szeregów podstawowych kryteriów zbieżności: warunek konieczny zbieżności, kryterium porównawcze, d'Alemberta, Cauchy'ego, o zbieżności bezwzględnej, Leibniza o szeregach naprzemiennych; podstawowe wiadomości o liczbie e.

Przykładowe zadania:

Rozstrzygnąć, czy następujące szeregi są zbieżne

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ **10.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n-1}$ **12.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^4}$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^3}{2^n}$

14. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{5}{n})^n$.

5. Funkcje.

Pojęcia, fakty: granica funkcji, ciągłość, twierdzenie Weierstrassa, własność Darboux.

Umiejętności: znajomość podstawowych pojęć dotyczących funkcji: dziedzina, granica, ciągłość, monotoniczność, ograniczoność, (nie)parzystość, okresowość; umiejętność obliczania granicy funkcji w punkcie, wyznaczania punktów ciągłości i punktów nieciągłości funkcji; znajomość sformułowania i rozumienie twierdzenia Weierstrassa i własności Darboux.

Przykładowe zadania:

Obliczyć następujące granice:

15. $\lim\limits_{x\to 7}(\frac{1}{x-7} - \frac{8}{x^2-6x-7})$ **16.** $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x}$

Wyznaczyć dziedzinę oraz punkty ciągłości i nieciągłości funkcji f, jeśli $f(x)$ dane jest wzorem:

17. $\mathrm{sgn}(\sin x)$ **18.** $\{x\} - (\{x\})^2$

19. Dowieść, że równanie $x^x = 5$ ma co najmniej jedno rozwiązanie.

6. Pochodna funkcji.

Pojęcia, fakty: pochodna funkcji, twierdzenie Rolle'a, twierdzenie Lagrange'a, reguła de l'Hospitala, zastosowania pochodnych.

Umiejętności: znajomość definicji i interpretacji pochodnej funkcji w punkcie; umiejętność obliczania pochodnej prostych funkcji z definicji oraz wyznaczania punktów różniczkowalności i nieróżniczkowalności funkcji; znajomość pochodnych podstawowych funkcji; znajomość i umiejętność stosowania wzorów na oblicznie pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu, złożenia, potęgi, znajomość i rozumienie sformułowania twierdzeń Rolle'a i Lagrange'a, znajomość i umiejętność zastosowania reguły de l'Hospitala do obliczania granic funkcji, znajomość i umiejętność posługowania się pojęciami: pochodne jednostronne, pochodne wyższych rzędów, wypukłość funkcji, punkt przegięcia, asymptoty; znajomość warunków koniecznych i dostatecznych na ekstrema, umiejętność znajdowania najmniejszej i największej wartości funkcji ciągłej na przedziale domkniętym przzu pomocy rachunku różniczkowego (także przykłady, w których funkcja ma punkty nieróżniczkowalności).

Przykładowe zadania:

20. Niech $f(x) = x^5$. Korzystając **z definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na $f'(x)$.

Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji określonej podanym wzorem w podanym przedziale

21. $|x^2-1|+3x$, $[-2,2]$

22. $\ln x - \frac{x}{10}$, $[1,e^3]$

23. Niech $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x - 1} & \text{dla} \quad x\neq 0 \\ A & \text{dla} \quad x=0 \end{cases}$.

Dla którego A istnieje $f'(0)$ i ile jest równa?

7. Szeregi potęgowe, wzór Taylora.

Pojęcia, fakty: szereg potęgowy, promień i przedział zbieżności szeregu potęgowego, wzór Taylora.

Umiejętności: umiejętność wyznaczania przedziału zbieżności; znajomość wzoru Taylora i rozwinięć w szereg potęgowy podstawowych funkcji; umiejętność stosowania wzoru Taylora do obliczeń przybliżonych.

Przykładowe zadania:

Wyznaczyć przedziały zbieżności następujących szeregów potęgowych

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n+7}x^{6n}}{\sqrt{n}}$

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}10^{n^2}x^{n^3}$

Obliczyć przybliżone wartości następujących liczb korzystając z trzech wyrazów (zerowego, pierwszego i drugiego) odpowiednio dobranego szeregu Taylora. Oszacować błąd przybliżenia.

26. $\sqrt{24}$ **27.** $\sin\frac{1}{10}$

8. Całka nieoznaczona.

Pojęcia, fakty: funkcja pierwotna, całkowanie przez części i przez podstawienie, ułamki proste.

Umiejętności: obliczanie całek z wykorzystaniem podstawowych metod: całkowanie przez części, przez podstawienie, całkowanie funkcji wymiernych.

Przykładowe zadania:

Obliczyć $\int f(x)dx$, jeśli $f(x)$ dana jest wzorem:

28. $x \sin 2x$ **29.** $e^{5x} \cos 3x$

30. $\sin \sqrt{x}$ **31.** $\dfrac{5x^2 - 12}{(x^2 - 6x + 13)^2}$

9. Całka oznaczona.

Pojęcia, fakty: całka oznaczona, podziały przedziału.

Umiejętności: umiejętność obliczania całki prostych funkcji z definicji, zastosowanie do obliczania pól figur płaskich.

Przykładowe zadania:

Obliczyć całki

32. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$ **33.** $\int\limits_0^{6\pi} |\sin x| dx$

34. Obliczyć pole figury ograniczonej parabolą o równaniu $y = x^2$ i prostą $y = x + 2$.

10. Całki niewłaściwe.

Pojęcia, fakty: całka niewłaściwa, zbieżność i rozbieżność całek niewłaściwych, kryterium porównawcze, zbieżność bezwzględna całek niewłaściwych, kryterium całkowe zbieżności szeregów.

Umiejętności: umiejętność rozstrzygania zbieżności oraz obliczania prostych całek zbieżnych, rozumienie kryterium całkowego, rozumienie podobieństw i różnic między całkami niewłaściwymi i szeregami liczbowymi.

Przykładowe zadania:

Zbadać zbieżność całek niewłaściwych

35. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+\sin^2 x}$

36. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x^4}{x^3} dx$

11. Funkcje wielu zmiennych.

Pojęcia, fakty: funkcje wielu zmiennych, granica i ciągłość, pochodna cząstkowa, gradient, punkty krytyczne, ekstrema warunkowe.

Umiejętności: umiejętność rozstrzygania ciągłości i istnienia granicy w prostych przypadkach, umiejętność obliczania pochodnych cząstkowych, wyznaczania ekstremów warunkowych w prostych przypadkach (okrąg na płaszczyźnie lub w przestrzeni, sfera).

Przykładowe zadania:

37. Rozstrzygnąć istnienie granicy $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$. Jeśli granica istnieje, wyznaczyć jej wartość.

Zbadać ciągłość funkcji dwóch zmiennych - określić, w których punktach funkcje są ciągłe, a w których nieciągłe

38. $f(x,y) = \begin{cases} x^2 - y^2 & \text{dla} \quad x \geqslant y \\ x - y & \text{dla} \quad x < y \end{cases}$

39. $f(x,y) = \begin{cases} |x| & \text{dla} \quad y > x^2 \\ x & \text{dla} \quad y = x^2 \\ y & \text{dla} \quad y < x^2 \end{cases}$

40. Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe rzędu 1 funkcji $f(x,y,z) = x^7y^9 + ze^{xy}$.

Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji na zbiorze zdefiniowanym podanymi warunkami

41. $f(x,y) = x + y$, $9x^2 + 4y^2 = 36$

42. $f(x,y,z) = x - y + z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

43. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + xy + z^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ i $x + y + z = 1$

12. Całki wielokrotne.

Pojęcia, fakty: całki wielokrotne, twierdzenie o równości całek iterowanych, zmiana zmiennych całkowania, współrzędne biegunowe.

Umiejętności: umiejętność obliczania całek wielokrotnych, także z zastosowaniem współrzędnych biegunowych, zastosowanie całek wielokrotnych do obliczania pól i objętości.

Przykładowe zadania:

Dokonać zmiany kolejności całkowania. Obliczyć obydwie całki i porównać wyniki

44. $\int\limits_2^3 \int\limits_0^{\sqrt{y}} x^3 dxdy$ **45.** $\int\limits_1^2 \int\limits_1^{y} xydxdy$

46. Obliczyć we współrzędnych biegunowych całkę

$$\int\limits_0^3 \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} |x + y| dydx.$$

Równania różniczkowe

Pojęcia, fakty: proste zastosowania równań różniczkowych zwyczajnych, równania liniowe drugiego rzędu, układy równań różniczkowych liniowych, metoda przybliżona Eulera

Przykładowe zadania:

47. Wiadomo, że szybkość zmian temperatury danego ciała jest proporcjonalna do różnicy między temperaturą tego ciała i temperaturą otoczenia. Zakładamy, że
$S(0) = 100°C$ w temperaturze otoczenia $20°C$. Po dziesięciu minutach temperatura ciała wynosi $60°C$. Po ilu minutach ciało będzie miało temperaturę $25°C$?

48. Rozwiązać równanie $y'' + 4y' + 5y = 0$ przy warunku początkowym

$$y(0) = -3, \; y'(0) = 0 \; .$$

49. Znaleźć rozwiązanie $(x(t), y(t))$ zagadnienia:

$$\frac{dx}{dt} = -x - y, \quad \frac{dy}{dt} = 2x - y, \quad x(0) = y(0) = 1 \; .$$

50. Rozważmy zagadnienie: $y' = 1 + t - y, \;\; y(0) = 0$. Używając metody Eulera
($y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$) z krokiem $h = 0,1$ wyznaczyć przybliżoną wartość rozwiązania dla $t = 1$.

Algebra

1. Grupy.

Pojęcia, fakty: własności działań w grupie, podgrupy, homomorfizmy (izomorfizmy) grup, warstwy, dzielnik normalny, grupa ilorazowa

Umiejętności: umiejętność ilustrowania abstrakcyjnych definicji przykładami: grupy liczbowe (tzn. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, \cdot)$), grupy permutacji, grupa pierwiastków z jedności.

Przykładowe zadania:

1. Czy zbiór liczb niewymiernych z dodawaniem tworzy grupę?

2. Udowodnić, że grupa, której każdy element spełnia równanie $a^2 = e$ jest abelowa.

3. Wykazać, że zbiór permutacji S_3 jest izomorficzny z grupą izometrii trójkąta równobocznego.

4. Które z następujących permutacji zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$ są parzyste:

a) $(1, 2, 4, 3)$, b) $(4, 3, 2, 1)$, c) $(2, 1, 4, 3)$.

5. Sprawdzić, czy dana funkcja jest homomorfizmem grup:

a) $\varphi : (\mathbb{C}, \cdot) \to (\mathbb{R}, \cdot)$, $\quad \varphi(z) = |z|$; $\qquad$ b) $\varphi : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, +)$, $\quad \varphi(a) = 5a$.

2. Pierścienie.

Pojęcia, fakty: pierścienie $\mathbb{Z}_m$ i $\mathbb{Z}[\sqrt{a}]$, ideały, pierścień ilorazowy, pierścień wielomianów, stopnie wielomianów i pierwiastki wielomianów, nieprzywiedlność wielomianów, twierdzenie Bézouta, wzory Viety.

Umiejętności: Umiejętność rozłożenia nad $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ konkretnego wielomianu małego stopnia. Znajdowanie NWD przy pomocy algorytmu Euklidesa.

Przykładowe zadania:

6. Które z poniższych zbiorów z działaniami są pierścieniami. Czy są to pierścienie przemienne i czy mają jedynkę?
a) Zbiór wszystkich funkcji ciągłych z przedziału $[0, 1]$ w zbiór liczb rzeczywistych z działaniami dodawania i mnożenia funkcji.
b) Zbiór wszystkich ciągów nieskończonych o wyrazach rzeczywistych z dodawaniem i mnożeniem ciągów.
c) $\mathbb{Z}_n$ z dodawaniem i mnożeniem modulo n.

7. Dowieść, że pierścień liczb całkowitych Gaussa $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ jest pierścieniem euklidesowym względem normy $N(a + bi) = a^2 + b^2$.

8. Korzystając z algorytmu Euklidesa w pierścieniu $\mathbb{Z}$ obliczyć $NWD(5166, 2499)$, a następnie liczbę $NWD(5166, 2499)$ przedstawić w postaci $5166x + 2499y$, gdzie $x, y \in \mathbb{Z}$.

9. Dane są wielomiany $f, g \in \mathbb{Q}[x]$: $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$,
$g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$. Znaleźć takie wielomiany $p, q \in \mathbb{Q}[x]$, że
$fp + gq = NWD(f, g)$.

3. Ciała.

Pojęcia, fakty: ciało liczb zespolonych, ciała proste, rozszerzenia ciał - elementy algebraiczne.

Umiejętności: znajomość przykładów ciał; konstrukcja liczb zespolonych, interpretacja geometryczna liczb zespolonych, postać trygonometryczna liczby zespolonej.

Przykładowe zadania:

10. Dowieść, że zbiór $\{a + b\sqrt{2} \ : \ a, b \in \mathbb{Q}\}$ ze zwykłym dodawaniem i mnożeniem jest ciałem.

11. Udowodnić, że pierścienie $\mathbb{Z}_5$ i $\mathbb{Z}_7$ są ciałami, a pierścienie $\mathbb{Z}_6$ i $\mathbb{Z}_4$ nie są ciałami.

12. Udowodnić, że liczba $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ jest algebraiczna.

13. Rozwiązać w liczbach zespolonych równanie $z^4 + z^2 - 2 = 0$.

4. Przestrzenie liniowe nad $\mathbb{R}$.

Pojęcia, fakty: podprzestrzenie liniowe, liniowa kombinacja wektorów, niezależność wektorów, wymiar przestrzeni liniowej, współrzędne wektora w bazie, przekształcenie liniowe, macierz przekształcenia w bazach, jądro, obraz i rząd przekształcenia liniowego.

Umiejętności: umiejętność sprawdzania liniowej zależności/niezależności wektorów, umiejętnóść ilustrowania przykładami pojęć wymienionych powyżej, umiejętność wyznaczania jądra, obrazu i rzędu przekształacenia liniowego.

Przykładowe zadania:

14. Rozpatrujemy ciało $\mathbb{R}$ jako przestrzeń liniową nad ciałem $\mathbb{Q}$. Dowieść, że każdy z układów $\{\sqrt{2}, \ \sqrt{3}\}$ i $\{1, \ \sqrt{3}, \ \sqrt{5}\}$ jest liniowo niezależny i że układ $\{\sqrt{2}, \ \sqrt{3}, \ 2\sqrt{3}\}$ jest liniowo zależny.

15. Czy układ $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$?

16. Znaleźć takie wartości parametru a, by wektory $(a, 1, 0)$, $(1, a, 3)$, $(a, 1, 1)$ należące do $\mathbb{R}^3$ były liniowo zależne.

17. Znaleźć bazy obrazu i jądra przekształcenia liniowego $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

określonego wzorem

$$\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + 2x_2 - x_3,\ \ x_1 + x_2 + 2x_3,\ \ 2x_1 + 3x_2 + x_3).$$

18. Znaleźć współrzędne wektora $(1, 1, 1, 1)$ w bazie przestrzeni $\mathbb{R}^4$ złożonej z wektorów: $(1, 0, 1, 1)$, $(1, 0, 1, 4)$, $(1, 0, -1, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$.

5. Macierze i wyznaczniki, układy równań liniowych.

Pojęcia, fakty: algebra macierzy; rząd macierzy; wyznacznik, rozwinięcie Laplace'a, macierz odwrotna, wielomian charakterystyczny, układy cramerowskie, twierdzenie Kroneckera-Cappellego, metoda eliminacji Gaussa, układy jednorodne.

Umiejętności: umiejętność wykonywania działań na macierzach, wyznaczanie rzędu macierzy, obliczanie wyznaczników i znajdowanie macierzy odwrotnej, umiejętność rozwiązywania układów równań liniowych co najmniej dwoma metodami: metodą eliminacji Gaussa oraz przy pomocy wzorów Cramera.

Przykładowe zadania:

19. Obliczyć rzędy macierzy

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

20. Znaleźć macierz odwrotną do macierzy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

21. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n mamy

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

22. Rozwiązać układ równań metodą eliminacji Gaussa:

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1, \quad 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \quad 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4.$$

6. Przestrzenie euklidesowe.

Pojęcia, fakty: iloczyn skalarny, norma wektora i nierówność trójkąta, bazy ortogonalne i ortonormalne; przekształcenia liniowe i izometrie liniowe przestrzeni euklidesowych; wektory własne i wartości własne odwzorowań liniowych.

Umiejętności: umiejętność znajdowania wektorów własnych i wartości własnych odwzorowań liniowych; znajomość przykładów i własności izometrii liniowych przestrzeni E^2 i E^3.

Przykładowe zadania:

23. Niech $P : E^2 \to E^2$ oznacza rzut prostopadły na prostą o równaniu $2x + 3y = 0$. Wyprowadzić wzór na $P(x, y)$.

24. Wyznaczyć wartości własne i odpowiadające im wektory własne następujących macierzy:

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Rachunek Prawdopodobieństwa

1. Prawdopodobieństwo z użyciem kombinatoryki.

Pojęcia, fakty: permutacje, kombinacje, wariacje, wzór dwumianowy, wzór wielomianowy, model urnowy

Umiejętności: wyliczanie prawdopodobieństw z użyciem kombinatoryki jako ilorazu ilości zdarzeń sprzyjających do możliwych.

Przykładowe zadania:

1. Rzucamy kostkami zieloną i czerwoną. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wynik na czerwonej jest większy niż na zielonej?

2. Wyprodukowano 10000 żarówek, w tym 20 wadliwych. Testujemy niezależnie 100 żarówek. Jakie jest prawdopodobieństwo, że 99 testowanych żarówek jest dobrych?

3. Samuel Pepys napisał do Isaaca Newtona : *co jest bardziej prawdopodobne (a) jedna 6 w 6 rzutach kostką (b), czy dwie 6 w 12 rzutach*? Obliczyć te prawdopodobieństwa.

4. Przypuśćmy, że kostka do gry ma 1 na trzech ścianach, 2 na dwóch ścianach i 3 na jednej ścianie. Rzucamy taką kostką 10 razy. Wyliczyć prawdopodobieństwo uzyskania 5 razy 1, 3 razy 2 i 2 razy 3.

2. Prawdopodobieństwo warunkowe, niezależność.

Pojęcia, fakty: prawdopodobieństwo sumy zdarzeń, nierówności Bonferroniego, niezależność zdarzeń parami, niezależność ciągu zdarzeń, schemat Bernoulliego, wzór na prawdopodobieństwo całkowite, wzór Bayesa.

Umiejętności: umiejętność wykorzystania warunku niezależności do oblicznia prawdopodobieństw, umiejętność zastosowania wzoru na prawdopodobieństwo całkowite i wzoru Bayesa.

Przykładowe zadania:

5. Dane są dwa pudełka. W jednym pudełku znajduje się jedna kula biała i jedna czarna. W drugim dwie czarne kule i jedna biała. Wybieramy losowo pudełko i z wybranego pudełka wybieramy losowo kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wybrana kula będzie czarna?

6. Niech A, B, C oznaczają odpowiednio zdarzenia: Ala i Basia mają urodziny tego samego dnia; Basia i Kasia mają urodziny tego samego dnia; Kasia i Ala mają urodziny tego samego dnia. Dowieść, że A, B, C są niezależne parami, nie są jednak niezależne jako ciąg zdarzeń.

7. Rzucamy (niezależnie) symetryczną kostką do chwili uzyskania 6. Niech N oznacza ilość potrzebnych rzutów. Obliczyć $P(N = 3)$.

8. Powtarzamy rzuty kostką, do czasu uzyskania dokładnie 3 szóstek. Jeśli T jest liczbą potrzebnych prób, obliczyć $P(T = 6)$.

3. Zmienne losowe.

Pojęcia, fakty: funkcja prawdopodobieństwa zmiennej (Poissona, dwumianowa, geometryczna), dystrybuanta zmiennej losowej, gęstość dystrybuanty (normalna, wykładnicza), mieszanki dystrybuant, rozkłady łączne i brzegowe pary zmiennych losowych, rozkład sumy niezależnych zmiennych losowych (splot).

Umiejętności: umiejętność liczenia rozkładów brzegowych i warunkowych z rozkładu łącznego, umiejętność liczenia splotów rozkładów, liczenie rozkładów funkcji od zmiennych losowych.

Przykładowe zadania:

9. Zmienne X, Y mają łączny rozkład zadany tabelą

$X \backslash Y$	1	2	3
0	0.01	0.04	0.05
1	0.03	0.04	0.03
2	0.12	0.16	0.12
3	0.04	0.16	0.20

Obliczyć $P(X = 2 \mid Y \geqslant 2)$.

10. Niech X będzie zmienną o rozkładzie wykładniczym o gęstości $f(x) = 3e^{-3x}$, $x > 0$ oraz $\psi(x) = x^2$. Obliczyć dystrybuantę i gęstość zmiennej $\psi(X)$.

11. Niech X, Y będą współrzędnymi punktu wylosowanego na płaszczyźnie. Zakładając, że X i Y są niezależne o rozkładach normalnych $N(0, 1)$, znaleźć prawdopodobieństwo, że punkt znajduje się w kole jednostkowym, tzn., $P((X^2 + Y^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant 1)$.

4. Wartość oczekiwana.

Pojęcia, fakty: momenty zmiennej losowej, wariancja, odchylenie standardowe, mediana, funkcja tworząca, funkcja tworząca momenty, kowariancja

Umiejętności: liczenie wartości oczekiwanej, wariancji, kowariancji znajdowanie momentów przy użyciu funkcji tworzących

Przykładowe zadania:

12. Zmienne X, Y mają łączny rozkład zadany tabelą

$X \backslash Y$	1	2	3
0	0.02	0.04	0.04
1	0.03	0.04	0.03
2	0.12	0.16	0.12
3	0.04	0.16	0.20

Obliczyć EX, EY oraz VarX i VarY.

13. Z urny zawierającej 3 kul czarnych, 4 czerwonych, 3 białych, wyciągamy 3 kule. Niech U oznacza liczbę wyciągniętych kul czarnych, V liczbę kul czerwonych. Znaleźć $Cov(U, V)$.

14. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na $(0,1)$ oraz N niezależną od tego ciągu zmienną losową, o rozkładzie $P(N = k) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{(k-1)}$, $k = 1, 2, \ldots$. Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej $Y = X_1 + \cdots + X_N$.

5. Twierdzenia graniczne.

Pojęcia, fakty: przybliżenie rozkładu dwumianowego rozkładem Poissona, nierówność Czebyszewa, słabe Prawo Wielkich Liczb, mocne Prawo Wielkich Liczb, Centralne Twierdzenie Graniczne (CTG).

Umiejętności: zastosowanie twierdzeń granicznych do przybliżania wartości średniej oraz do znajdowania przybliżonych wartości rozkładu sum niezależnych zmiennych losowych.

Przykładowe zadania:

15. Dla zmiennej S o rozkładzie dwumianowym z parametrami $n = 12$ i $p = \frac{1}{36}$ znaleźć wartość przybliżoną $P(S = 5)$, używając rozkładu Poissona.

16. Gramy rzucając kostką, stawiamy na parzyste 81 razy, wygrywając lub przegrywając za każdym razem 1 zł. Jakie jest prawdopodobieństwo, że saldo gry będzie dodatnie po 81 grach? Używając CTG i tablic rozkładu normalnego podać wartość przybliżoną tego prawdopodobieństwa.

17. Wykonujemy kolejne, niezależne rzuty monetą symetryczną. Niech $X_i = 1$ jeśli wypada orzeł, $X_i = 0$, jeśli wypada reszka, $i = 1, \ldots$. Ile razy należałoby rzucić, aby z nierówności Czebyszewa wywnioskować, że prawdopodobieństwo tego, że średnia arytmetyczna $\frac{X_1 + \cdots + X_i}{i}$ różni się od 0.5 o więcej niż 0.01 jest mniejsze lub równe od 4%?