

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

1. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{4n} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{4n+4} \right) = \dots\dots\dots$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{3n+3} \right) = \dots\dots\dots$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{2n+2} \right) = \dots\dots\dots$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \right) = \dots\dots\dots$

2. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = e^{x^3} + e^{x^5}.$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(66)}(0) = \dots\dots\dots$

b) $f^{(65)}(0) = \dots\dots\dots$

c) $f^{(63)}(0) = \dots\dots\dots$

d) $f^{(60)}(0) = \dots\dots\dots$

3. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p , dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^{2p} + x^p}}{x^7 + x^3} dx, \dots\dots\dots$

b) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^{2p} + x^p}}{x^6 + x^2} dx, \dots\dots\dots$

c) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^{2p} + x^p}}{x^9 + x^5} dx, \dots\dots\dots$

d) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^{2p} + x^p}}{x^8 + x^4} dx, \dots\dots\dots$

4. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^5 n^6}{k^{12} + n^{12}} = \dots\dots\dots$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^6 n^7}{k^{14} + n^{14}} = \dots\dots\dots$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^7 n^8}{k^{16} + n^{16}} = \dots\dots\dots$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^8 n^9}{k^{18} + n^{18}} = \dots\dots\dots$

5. Podaj w możliwie prostej postaci takie wyrażenia A , B , C , D , aby dla każdej funkcji ciągłej $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

a) $\int_0^1 \int_x^{2-x} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$

$A = \dots\dots\dots$ $B = \dots\dots\dots$ $C = \dots\dots\dots$ $D = \dots\dots\dots$

b) $\int_0^1 \int_1^{2-x} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$

$A = \dots\dots\dots$ $B = \dots\dots\dots$ $C = \dots\dots\dots$ $D = \dots\dots\dots$

c) $\int_1^2 \int_0^{2-x} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$

$A = \dots\dots\dots$ $B = \dots\dots\dots$ $C = \dots\dots\dots$ $D = \dots\dots\dots$

d) $\int_0^2 \int_0^{2-x} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$

$A = \dots\dots\dots$ $B = \dots\dots\dots$ $C = \dots\dots\dots$ $D = \dots\dots\dots$

6. Niech $z = (1 - i) \cdot (1 + \sqrt{3} \cdot i)$. Zapisz w postaci kartezjańskiej:

a) $z^{51} = \dots\dots\dots$

b) $z^{54} = \dots\dots\dots$

c) $z^{60} = \dots\dots\dots$

d) $z^{66} = \dots\dots\dots$

7. Dla podanej liczby λ podaj taką liczbę a , aby λ była wartością własną macierzy $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) $\lambda = 5, a = \dots\dots\dots$

b) $\lambda = 4, a = \dots\dots\dots$

c) $\lambda = 2, a = \dots\dots\dots$

d) $\lambda = 1, a = \dots\dots\dots$

8. Dla podanej jednej z liczb a, b i c wskaż pozostałe liczby tak, aby wektor (a, b, c) był prostopadły do wektorów $(-2, 3, 6)$ i $(6, -2, 3)$.

a) $a = \dots\dots\dots, b = 2, c = \dots\dots\dots$

b) $a = 1, b = \dots\dots\dots, c = \dots\dots\dots$

c) $a = 4, b = \dots\dots\dots, c = \dots\dots\dots$

d) $a = \dots\dots\dots, b = \dots\dots\dots, c = 3$

9. Niech $C(n)$ będzie liczbą ideałów w pierścieniu $\mathbb{Z}$ zawierających liczbę n^3 . Wówczas

a) $C(28) = \dots\dots\dots$

b) $C(25) = \dots\dots\dots$

c) $C(26) = \dots\dots\dots$

d) $C(27) = \dots\dots\dots$

10. Dla podanej liczby k podaj najmniejszą taką liczbę naturalną n , że w grupie permutacji S_n istnieje element rzędu k .

a) $k = 47, \quad n = \dots\dots\dots$

b) $k = 48, \quad n = \dots\dots\dots$

c) $k = 49, \quad n = \dots\dots\dots$

d) $k = 50, \quad n = \dots\dots\dots$

11. W urnie znajduje się $3n$ kul, po n każdego z trzech kolorów: amaran-towego, białego i czarnego. Losujemy z urny trzy kule (losowanie bez zwracania). Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że wylosowano kule trzech różnych kolorów. Podaj w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(5) = \dots\dots\dots$

b) $P(4) = \dots\dots\dots$

c) $P(3) = \dots\dots\dots$

d) $P(2) = \dots\dots\dots$

12. Zdarzenia losowe A , B , C i D są niezależne. Dla podanych prawdo-podobieństw $P(A \cap B)$, $P(B \cap C)$ i $P(C \cap D)$ podaj $P(A \cap D)$, o ile istnieją niezależne zdarzenia A , B , C i D spełniające podane warunki. Wpisz **NIE**, jeśli takie zdarzenia nie istnieją.

a) $P(A \cap B) = 1/2, \quad P(B \cap C) = 1/3, \quad P(C \cap D) = 1/2,$

$P(A \cap D) = \dots\dots\dots$

b) $P(A \cap B) = 1/2, \quad P(B \cap C) = 1/4, \quad P(C \cap D) = 1/2,$

$P(A \cap D) = \dots\dots\dots$

c) $P(A \cap B) = 1/2, \quad P(B \cap C) = 2/3, \quad P(C \cap D) = 1/2,$

$P(A \cap D) = \dots\dots\dots$

d) $P(A \cap B) = 1/2, \quad P(B \cap C) = 1/5, \quad P(C \cap D) = 1/2,$

$P(A \cap D) = \dots\dots\dots$