

EGZAMIN LICENCJACKI (zadania otwarte)
20 lutego 2026 r.

Zadanie **1.** Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \ln(x^2 + 1).$$

Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

Zadanie **2.** Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną k , dla której

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^k y^k}{x^{20} + y^{30}} = 0.$$

Zadanie **3.** Rozwiąż zagadnienie początkowe

$$x''(t) - x'(t) = 1, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

Zadanie **4. a) (10 punktów)** Dane jest takie przekształcenie liniowe $F: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$, że

$$\operatorname{Im}(F^2) = \operatorname{Im}(F).$$

Udowodnij, że wówczas $\operatorname{Im}(F^3) = \operatorname{Im}(F)$. Przez $\operatorname{Im}(F)$ oznaczamy obraz przekształcenia F .

b) (10 punktów) Podaj przykład takiego przekształcenia liniowego $F: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$, że $F^4 \neq \mathbf{0}$ oraz $F^5 = \mathbf{0}$, gdzie $\mathbf{0}: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ oznacza przekształcenie zerowe.

Zadanie **5.** Rozważamy grupy $F = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}$, $G = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_8$ oraz $H = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$,

a) (10 punktów) Wybierz dwie spośród grup F , G , H i udowodnij, że są izomorficzne.

b) (10 punktów) Wybierz dwie spośród grup F , G , H i udowodnij, że nie są izomorficzne.

Zadanie **6.** W urnie znajduje się $4n$ kul, po n kul każdego z czterech kolorów. Losujemy z urny cztery kule (losowanie bez zwracania). Niech P_n będzie prawdopodobieństwem, że wylosowano kule czterech różnych kolorów. Oblicz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n.$$