

*Zadanie* **1.** Wyznacz promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n \cdot x^{n^2}}{n^{n^2}}.$$

*Zadanie* **2.** Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x, y, z) = x + y$$

na okręgu

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \wedge x + y + z = 0\}.$$

Wyznacz wszystkie punkty, w których wartości najmniejsza i największa są osiągane.

*Zadanie* **3.** Rozwiąż zagadnienie początkowe

$$x'(t) = 1 + x^2(t), \quad x(0) = 0.$$

*Zadanie* **4.** Punktem kratowym nazywamy każdy punkt o wszystkich współrzędnych całkowitych.

**a) (5 punktów)** Udowodnij, że pole dowolnego kwadratu na płaszczyźnie, o wszystkich wierzchołkach w punktach kratowych, jest liczbą całkowitą.

**b) (5 punktów)** Rozstrzygnij, czy długość boku dowolnego kwadratu na płaszczyźnie, o wszystkich wierzchołkach w punktach kratowych, jest liczbą całkowitą.

**c) (5 punktów)** Udowodnij, że objętość dowolnego sześcianu w przestrzeni, o wszystkich wierzchołkach w punktach kratowych, jest liczbą całkowitą.

**d) (5 punktów)** Rozstrzygnij, czy długość krawędzi dowolnego sześcianu w przestrzeni, o wszystkich wierzchołkach w punktach kratowych, jest liczbą całkowitą.

*Zadanie* **5. a) (10 punktów)** Udowodnij, że każda podgrupa indeksu 2 grupy skończonej jest podgrupą normalną.

**b) (10 punktów)** Rozstrzygnij, czy w grupie permutacji  $S_3$  istnieje dwuelementowa podgrupa normalna.

*Przypomnienie:* Indeks podgrupy  $H$  skończonej grupy  $G$  jest iloraz liczby elementów grupy  $G$  przez liczbę elementów podgrupy  $H$ . Podgrupa  $H$  jest normalna, jeżeli dla każdego  $g \in G$  zachodzi równość warstw lewo- i prawostronnej:  $gH = Hg$ . Podgrupa normalna nazywana jest też dzielnikiem normalnym.

*Zadanie* **6.** Dana jest liczba rzeczywista  $p > 1$ . Rzucamy kostką do gry tak długo, aż wypadnie liczba oczek różna od 6. Jeżeli wypadło  $k$  szóstek, a w  $k+1$ -szym rzucie  $n < 6$ , to wynikiem jest  $p^k \cdot n$ .

Wyznacz, w zależności od  $p$ , wartość oczekiwaną wyniku tak opisaney procedury.

**Uwaga:** Powyższe jest sformalizowanym opisem rzutu kostką do gry, gdzie każda wyrzucona szóstka zostaje unieważniona, a my rzucamy dalej otrzymując mnożnik  $p$ .