

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

1. Podaj wartość granicy dla tak dobranego parametru k , aby granica ta była dodatnia i skończona.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^{24} + kn^k} - n^{12} \right) = \mathbf{6}$ dla $k = \mathbf{12}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^{24} + kn^k} - n^8 \right) = \mathbf{16/3}$ dla $k = \mathbf{16}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[4]{n^{24} + kn^k} - n^6 \right) = \mathbf{9/2}$ dla $k = \mathbf{18}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[8]{n^{24} + kn^k} - n^3 \right) = \mathbf{21/8}$ dla $k = \mathbf{21}$

2. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = \ln(1 + x^5) + \ln(1 + x^3).$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(66)}(0) = -\frac{\mathbf{66!}}{\mathbf{22}}$

b) $f^{(65)}(0) = \frac{\mathbf{65!}}{\mathbf{13}}$

c) $f^{(63)}(0) = \frac{\mathbf{63!}}{\mathbf{21}}$

d) $f^{(60)}(0) = -\frac{\mathbf{60!}}{\mathbf{12}} - \frac{\mathbf{60!}}{\mathbf{20}}$

3. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p , dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int_0^\infty \frac{x^{2p} + x^p}{\sqrt{x^{10} + x^5}} dx, \quad (\mathbf{3/2}, \mathbf{2})$

b) $\int_0^\infty \frac{x^{2p} + x^p}{\sqrt{x^9 + x^4}} dx, \quad (\mathbf{1}, \mathbf{7/4})$

c) $\int_0^\infty \frac{x^{2p} + x^p}{\sqrt{x^{12} + x^7}} dx, \quad \mathbf{\emptyset}$

d) $\int_0^\infty \frac{x^{2p} + x^p}{\sqrt{x^{11} + x^6}} dx, \quad (\mathbf{2}, \mathbf{9/4})$

4. Podaj wartość granicy.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt[3]{\frac{k^2}{n^5}} = \frac{3}{5}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt[5]{\frac{k^2}{n^7}} = \frac{5}{7}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt[3]{\frac{k^4}{n^7}} = \frac{3}{7}$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt[5]{\frac{k^4}{n^9}} = \frac{5}{9}$$

5. Podaj w możliwie prostej postaci takie wyrażenia A , B , C , D , aby dla każdej funkcji ciągłej $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

$$\text{a) } \int_0^2 \int_0^{\sqrt{20x-x^2}} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(x, y) dx dy$$

$$A = 0 \qquad B = 6 \qquad C = 10 - \sqrt{100 - y^2} \qquad D = 2$$

$$\text{b) } \int_0^2 \int_0^{\sqrt{10x-x^2}} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(x, y) dx dy$$

$$A = 0 \qquad B = 4 \qquad C = 5 - \sqrt{25 - y^2} \qquad D = 2$$

$$\text{c) } \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(x, y) dx dy$$

$$A = 0 \qquad B = 2 \qquad C = 2 - \sqrt{4 - y^2} \qquad D = 2$$

$$\text{d) } \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(x, y) dx dy$$

$$A = 0 \qquad B = 1 \qquad C = 1 - \sqrt{1 - y^2} \qquad D = 1 + \sqrt{1 - y^2}$$

6. Podaj taką liczbę rzeczywistą a , że liczba zespolona z podanej postaci spełnia równanie $\arg z = 3\arg(2+i)$.

a) $z = 1 + ai, \quad a = \mathbf{11/2}$

b) $z = a + i, \quad a = \mathbf{2/11}$

c) $z = 2 + ai, \quad a = \mathbf{11}$

d) $z = a + 2i, \quad a = \mathbf{4/11}$

7. Dla podanej liczby λ podaj taką liczbę a , aby λ była wartością własną macierzy $\begin{pmatrix} 5 & a \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

a) $\lambda = 10, \quad a = \mathbf{15}$

b) $\lambda = 8, \quad a = \mathbf{3}$

c) $\lambda = 6, \quad a = \mathbf{-1}$

d) $\lambda = 4, \quad a = \mathbf{3}$

8. Dla podanych liczb a i b wskaż takie liczby c , d i e , aby wektory $(2, 5, 7, 12, 19)$, $(3, 4, 7, 11, 18)$ i (a, b, c, d, e) były liniowo zależne.

a) $a = 1, \quad b = 6, \quad c = \mathbf{7}, \quad d = \mathbf{13}, \quad e = \mathbf{20}$

b) $a = 1, \quad b = 5, \quad c = \mathbf{6}, \quad d = \mathbf{11}, \quad e = \mathbf{17}$

c) $a = 3, \quad b = 5, \quad c = \mathbf{8}, \quad d = \mathbf{13}, \quad e = \mathbf{21}$

d) $a = 2, \quad b = 7, \quad c = \mathbf{9}, \quad d = \mathbf{16}, \quad e = \mathbf{25}$

9. Niech $E(n)$ będzie liczbą elementów rzędu nie większego od 3 w grupie izometrii n -kąta foremnego. Wówczas:

a) $E(33) = \mathbf{36}$

b) $E(30) = \mathbf{34}$

c) $E(31) = \mathbf{32}$

d) $E(32) = \mathbf{34}$

10. Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{1, 2, 3, \dots, p-2, p-1\}$, natomiast działaniem jest mnożenie modulo p . Dla podanej liczby pierwszej p podaj element odwrotny do 5.

a) $p = 11$, **9**

b) $p = 17$, **7**

c) $p = 23$, **14**

d) $p = 29$, **6**

11. Rzucamy trzy razy kostką do gry, która na ściankach ma 1, 2, 2, 3, 3, 3 oczek. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że suma liczb oczek wyrzuconych w poszczególnych rzutach jest równa n . Podaj w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(4) = \mathbf{1/36}$

b) $P(7) = \mathbf{7/24}$

c) $P(8) = \mathbf{1/4}$

d) $P(9) = \mathbf{1/8}$

12. Zdarzenia losowe A i B są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A)$ oraz $P(B)$ podaj $P(A \cup B)$.

a) $P(A) = 1/3$, $P(B) = 1/4$, $P(A \cup B) = \mathbf{1/2}$

b) $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/2$, $P(A \cup B) = \mathbf{3/4}$

c) $P(A) = 1/5$, $P(B) = 1/8$, $P(A \cup B) = \mathbf{3/10}$

d) $P(A) = 1/4$, $P(B) = 1/6$, $P(A \cup B) = \mathbf{3/8}$