

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

1. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{4n} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{4n+4} \right) = \mathbf{16 - e^4}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{3n+3} \right) = \mathbf{8 - e^3}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{2n+2} \right) = \mathbf{4 - e^2}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \right) = \mathbf{2 - e}$

2. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = e^{x^3} + e^{x^5}.$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(66)}(0) = \frac{\mathbf{66!}}{\mathbf{22!}}$

b) $f^{(65)}(0) = \frac{\mathbf{65!}}{\mathbf{13!}}$

c) $f^{(63)}(0) = \frac{\mathbf{63!}}{\mathbf{21!}}$

d) $f^{(60)}(0) = \frac{\mathbf{60!}}{\mathbf{20!}} + \frac{\mathbf{60!}}{\mathbf{12!}}$

3. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p , dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^{2p} + x^p}}{x^7 + x^3} dx, \quad (\mathbf{4, 6})$

b) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^{2p} + x^p}}{x^6 + x^2} dx, \quad (\mathbf{2, 5})$

c) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^{2p} + x^p}}{x^9 + x^5} dx, \quad \mathbf{\emptyset}$

d) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^{2p} + x^p}}{x^8 + x^4} dx, \quad (\mathbf{6, 7})$

4. Podaj wartość granicy.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^5 n^6}{k^{12} + n^{12}} = \frac{\pi}{24}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^6 n^7}{k^{14} + n^{14}} = \frac{\pi}{28}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^7 n^8}{k^{16} + n^{16}} = \frac{\pi}{32}$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^8 n^9}{k^{18} + n^{18}} = \frac{\pi}{36}$$

5. Podaj w możliwie prostej postaci takie wyrażenia A , B , C , D , aby dla każdej funkcji ciągłej $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

$$\text{a) } \int_0^1 \int_x^{2-x} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

$$A = \pi/4 \quad B = \pi/2 \quad C = 0 \quad D = \frac{2}{\cos \varphi + \sin \varphi} = \frac{\sqrt{2}}{\cos(\varphi - \frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{\sin(\varphi + \frac{\pi}{4})}$$

$$\text{b) } \int_0^1 \int_1^{2-x} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

$$A = \pi/4 \quad B = \pi/2 \quad C = 1/\sin \varphi \quad D = \frac{2}{\cos \varphi + \sin \varphi} = \frac{\sqrt{2}}{\cos(\varphi - \frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{\sin(\varphi + \frac{\pi}{4})}$$

$$\text{c) } \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

$$A = 0 \quad B = \pi/4 \quad C = 1/\cos \varphi \quad D = \frac{2}{\cos \varphi + \sin \varphi} = \frac{\sqrt{2}}{\cos(\varphi - \frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{\sin(\varphi + \frac{\pi}{4})}$$

$$\text{d) } \int_0^2 \int_0^{2-x} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

$$A = 0 \quad B = \pi/2 \quad C = 0 \quad D = \frac{2}{\cos \varphi + \sin \varphi} = \frac{\sqrt{2}}{\cos(\varphi - \frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{\sin(\varphi + \frac{\pi}{4})}$$

6. Niech $z = (1 - i) \cdot (1 + \sqrt{3} \cdot i)$. Zapisz w postaci kartezjańskiej:

a) $z^{51} = 2^{76} + 2^{76} \cdot i$

b) $z^{54} = 2^{81} \cdot i$

c) $z^{60} = -2^{90}$

d) $z^{66} = -2^{99} \cdot i$

7. Dla podanej liczby λ podaj taką liczbę a , aby λ była wartością własną macierzy $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) $\lambda = 5, \quad a = 10$

b) $\lambda = 4, \quad a = 4$

c) $\lambda = 2, \quad a = -2$

d) $\lambda = 1, \quad a = -2$

8. Dla podanej jednej z liczb a, b i c wskaż pozostałe liczby tak, aby wektor (a, b, c) był prostopadły do wektorów $(-2, 3, 6)$ i $(6, -2, 3)$.

a) $a = 1, \quad b = 2, \quad c = -2/3$

b) $a = 1, \quad b = 2, \quad c = -2/3$

c) $a = 4, \quad b = 8, \quad c = -8/3$

d) $a = -9/2, \quad b = -9, \quad c = 3$

9. Niech $C(n)$ będzie liczbą ideałów w pierścieniu $\mathbb{Z}$ zawierających liczbę n^3 . Wówczas

a) $C(28) = 28$

b) $C(25) = 7$

c) $C(26) = 16$

d) $C(27) = 10$

10. Dla podanej liczby k podaj najmniejszą taką liczbę naturalną n , że w grupie permutacji S_n istnieje element rzędu k .

a) $k = 47, \quad n = \mathbf{47}$

b) $k = 48, \quad n = \mathbf{19}$

c) $k = 49, \quad n = \mathbf{49}$

d) $k = 50, \quad n = \mathbf{27}$

11. W urnie znajduje się $3n$ kul, po n każdego z trzech kolorów: amaran-towego, białego i czarnego. Losujemy z urny trzy kule (losowanie bez zwracania). Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że wylosowano kule trzech różnych kolorów. Podaj w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(5) = \mathbf{25/91}$

b) $P(4) = \mathbf{16/55}$

c) $P(3) = \mathbf{9/28}$

d) $P(2) = \mathbf{2/5}$

12. Zdarzenia losowe A , B , C i D są niezależne. Dla podanych prawdo-podobieństw $P(A \cap B)$, $P(B \cap C)$ i $P(C \cap D)$ podaj $P(A \cap D)$, o ile istnieją niezależne zdarzenia A , B , C i D spełniające podane warunki. Wpisz **NIE**, jeśli takie zdarzenia nie istnieją.

a) $P(A \cap B) = 1/2, \quad P(B \cap C) = 1/3, \quad P(C \cap D) = 1/2,$
 $P(A \cap D) = \mathbf{3/4}$

b) $P(A \cap B) = 1/2, \quad P(B \cap C) = 1/4, \quad P(C \cap D) = 1/2,$
 $P(A \cap D) = \mathbf{1}$

c) $P(A \cap B) = 1/2, \quad P(B \cap C) = 2/3, \quad P(C \cap D) = 1/2,$
 $P(A \cap D) = \mathbf{3/8}$

d) $P(A \cap B) = 1/2, \quad P(B \cap C) = 1/5, \quad P(C \cap D) = 1/2,$
 $P(A \cap D) = \mathbf{NIE}$

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

1. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{2n+2} \right) = 4 - e^2$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{3n+3} \right) = 8 - e^3$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{4n} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{4n+4} \right) = 16 - e^4$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \right) = 2 - e$

2. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = e^{x^3} + e^{x^5}.$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(60)}(0) = \frac{60!}{20!} + \frac{60!}{12!}$

b) $f^{(63)}(0) = \frac{63!}{21!}$

c) $f^{(66)}(0) = \frac{66!}{22!}$

d) $f^{(65)}(0) = \frac{65!}{13!}$

3. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p , dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^{2p} + x^p}}{x^9 + x^5} dx, \quad \emptyset$

b) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^{2p} + x^p}}{x^7 + x^3} dx, \quad (4, 6)$

c) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^{2p} + x^p}}{x^6 + x^2} dx, \quad (2, 5)$

d) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^{2p} + x^p}}{x^8 + x^4} dx, \quad (6, 7)$

4. Podaj wartość granicy.

$$\text{a)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^7 n^8}{k^{16} + n^{16}} = \frac{\pi}{32}$$

$$\text{b)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^6 n^7}{k^{14} + n^{14}} = \frac{\pi}{28}$$

$$\text{c)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^5 n^6}{k^{12} + n^{12}} = \frac{\pi}{24}$$

$$\text{d)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^8 n^9}{k^{18} + n^{18}} = \frac{\pi}{36}$$

5. Podaj w możliwie prostej postaci takie wyrażenia A , B , C , D , aby dla każdej funkcji ciągłej $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

$$\text{a)} \quad \int_0^2 \int_0^{2-x} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

$$A = 0 \quad B = \pi/2 \quad C = 0 \quad D = \frac{2}{\cos \varphi + \sin \varphi} = \frac{\sqrt{2}}{\cos(\varphi - \frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{\sin(\varphi + \frac{\pi}{4})}$$

$$\text{b)} \quad \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

$$A = 0 \quad B = \pi/4 \quad C = 1/\cos \varphi \quad D = \frac{2}{\cos \varphi + \sin \varphi} = \frac{\sqrt{2}}{\cos(\varphi - \frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{\sin(\varphi + \frac{\pi}{4})}$$

$$\text{c)} \quad \int_0^1 \int_x^{2-x} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

$$A = \pi/4 \quad B = \pi/2 \quad C = 0 \quad D = \frac{2}{\cos \varphi + \sin \varphi} = \frac{\sqrt{2}}{\cos(\varphi - \frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{\sin(\varphi + \frac{\pi}{4})}$$

$$\text{d)} \quad \int_0^1 \int_1^{2-x} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

$$A = \pi/4 \quad B = \pi/2 \quad C = 1/\sin \varphi \quad D = \frac{2}{\cos \varphi + \sin \varphi} = \frac{\sqrt{2}}{\cos(\varphi - \frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{\sin(\varphi + \frac{\pi}{4})}$$

6. Niech $z = (1 - i) \cdot (1 + \sqrt{3} \cdot i)$. Zapisz w postaci kartezjańskiej:

a) $z^{60} = -2^{90}$

b) $z^{54} = 2^{81} \cdot i$

c) $z^{51} = 2^{76} + 2^{76} \cdot i$

d) $z^{66} = -2^{99} \cdot i$

7. Dla podanej liczby λ podaj taką liczbę a , aby λ była wartością własną macierzy $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) $\lambda = 1, \quad a = -2$

b) $\lambda = 2, \quad a = -2$

c) $\lambda = 5, \quad a = 10$

d) $\lambda = 4, \quad a = 4$

8. Dla podanej jednej z liczb a, b i c wskaż pozostałe liczby tak, aby wektor (a, b, c) był prostopadły do wektorów $(-2, 3, 6)$ i $(6, -2, 3)$.

a) $a = 4, \quad b = 8, \quad c = -8/3$

b) $a = 1, \quad b = 2, \quad c = -2/3$

c) $a = 1, \quad b = 2, \quad c = -2/3$

d) $a = -9/2, \quad b = -9, \quad c = 3$

9. Niech $C(n)$ będzie liczbą ideałów w pierścieniu $\mathbb{Z}$ zawierających liczbę n^3 . Wówczas

a) $C(28) = 28$

b) $C(27) = 10$

c) $C(26) = 16$

d) $C(25) = 7$

10. Dla podanej liczby k podaj najmniejszą taką liczbę naturalną n , że w grupie permutacji S_n istnieje element rzędu k .

a) $k = 49, \quad n = \mathbf{49}$

b) $k = 48, \quad n = \mathbf{19}$

c) $k = 47, \quad n = \mathbf{47}$

d) $k = 50, \quad n = \mathbf{27}$

11. W urnie znajduje się $3n$ kul, po n każdego z trzech kolorów: amaran-towego, białego i czarnego. Losujemy z urny trzy kule (losowanie bez zwracania). Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że wylosowano kule trzech różnych kolorów. Podaj w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(2) = \mathbf{2/5}$

b) $P(3) = \mathbf{9/28}$

c) $P(5) = \mathbf{25/91}$

d) $P(4) = \mathbf{16/55}$

12. Zdarzenia losowe A , B , C i D są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A \cap B)$, $P(B \cap C)$ i $P(C \cap D)$ podaj $P(A \cap D)$, o ile istnieją niezależne zdarzenia A , B , C i D spełniające podane warunki. Wpisz **NIE**, jeśli takie zdarzenia nie istnieją.

a) $P(A \cap B) = 1/2, \quad P(B \cap C) = 2/3, \quad P(C \cap D) = 1/2,$
 $P(A \cap D) = \mathbf{3/8}$

b) $P(A \cap B) = 1/2, \quad P(B \cap C) = 1/3, \quad P(C \cap D) = 1/2,$
 $P(A \cap D) = \mathbf{3/4}$

c) $P(A \cap B) = 1/2, \quad P(B \cap C) = 1/4, \quad P(C \cap D) = 1/2,$
 $P(A \cap D) = \mathbf{1}$

d) $P(A \cap B) = 1/2, \quad P(B \cap C) = 1/5, \quad P(C \cap D) = 1/2,$
 $P(A \cap D) = \mathbf{NIE}$

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

1. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{2n+2} \right) = 4 - e^2$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{4n} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{4n+4} \right) = 16 - e^4$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \right) = 2 - e$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{3n+3} \right) = 8 - e^3$

2. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = e^{x^3} + e^{x^5}.$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(66)}(0) = \frac{66!}{22!}$

b) $f^{(63)}(0) = \frac{63!}{21!}$

c) $f^{(60)}(0) = \frac{60!}{20!} + \frac{60!}{12!}$

d) $f^{(65)}(0) = \frac{65!}{13!}$

3. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p , dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^{2p} + x^p}}{x^6 + x^2} dx, \quad (2, 5)$

b) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^{2p} + x^p}}{x^7 + x^3} dx, \quad (4, 6)$

c) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^{2p} + x^p}}{x^9 + x^5} dx, \quad \emptyset$

d) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^{2p} + x^p}}{x^8 + x^4} dx, \quad (6, 7)$

4. Podaj wartość granicy.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^7 n^8}{k^{16} + n^{16}} = \frac{\pi}{32}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^5 n^6}{k^{12} + n^{12}} = \frac{\pi}{24}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^8 n^9}{k^{18} + n^{18}} = \frac{\pi}{36}$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^6 n^7}{k^{14} + n^{14}} = \frac{\pi}{28}$$

5. Podaj w możliwie prostej postaci takie wyrażenia A, B, C, D , aby dla każdej funkcji ciągłej $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

$$\text{a) } \int_0^1 \int_x^{2-x} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

$$A = \pi/4 \quad B = \pi/2 \quad C = 0 \quad D = \frac{2}{\cos \varphi + \sin \varphi} = \frac{\sqrt{2}}{\cos(\varphi - \frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{\sin(\varphi + \frac{\pi}{4})}$$

$$\text{b) } \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

$$A = 0 \quad B = \pi/4 \quad C = 1/\cos \varphi \quad D = \frac{2}{\cos \varphi + \sin \varphi} = \frac{\sqrt{2}}{\cos(\varphi - \frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{\sin(\varphi + \frac{\pi}{4})}$$

$$\text{c) } \int_0^2 \int_0^{2-x} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

$$A = 0 \quad B = \pi/2 \quad C = 0 \quad D = \frac{2}{\cos \varphi + \sin \varphi} = \frac{\sqrt{2}}{\cos(\varphi - \frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{\sin(\varphi + \frac{\pi}{4})}$$

$$\text{d) } \int_0^1 \int_1^{2-x} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

$$A = \pi/4 \quad B = \pi/2 \quad C = 1/\sin \varphi \quad D = \frac{2}{\cos \varphi + \sin \varphi} = \frac{\sqrt{2}}{\cos(\varphi - \frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{\sin(\varphi + \frac{\pi}{4})}$$

6. Niech $z = (1 - i) \cdot (1 + \sqrt{3} \cdot i)$. Zapisz w postaci kartezjańskiej:

a) $z^{60} = -2^{90}$

b) $z^{51} = 2^{76} + 2^{76} \cdot i$

c) $z^{66} = -2^{99} \cdot i$

d) $z^{54} = 2^{81} \cdot i$

7. Dla podanej liczby λ podaj taką liczbę a , aby λ była wartością własną macierzy $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) $\lambda = 5, \quad a = 10$

b) $\lambda = 2, \quad a = -2$

c) $\lambda = 1, \quad a = -2$

d) $\lambda = 4, \quad a = 4$

8. Dla podanej jednej z liczb a, b i c wskaż pozostałe liczby tak, aby wektor (a, b, c) był prostopadły do wektorów $(-2, 3, 6)$ i $(6, -2, 3)$.

a) $a = 1, \quad b = 2, \quad c = -2/3$

b) $a = 1, \quad b = 2, \quad c = -2/3$

c) $a = 4, \quad b = 8, \quad c = -8/3$

d) $a = -9/2, \quad b = -9, \quad c = 3$

9. Niech $C(n)$ będzie liczbą ideałów w pierścieniu $\mathbb{Z}$ zawierających liczbę n^3 . Wówczas

a) $C(28) = 28$

b) $C(26) = 16$

c) $C(27) = 10$

d) $C(25) = 7$

10. Dla podanej liczby k podaj najmniejszą taką liczbę naturalną n , że w grupie permutacji S_n istnieje element rzędu k .

a) $k = 49, \quad n = \mathbf{49}$

b) $k = 47, \quad n = \mathbf{47}$

c) $k = 50, \quad n = \mathbf{27}$

d) $k = 48, \quad n = \mathbf{19}$

11. W urnie znajduje się $3n$ kul, po n każdego z trzech kolorów: amaran-towego, białego i czarnego. Losujemy z urny trzy kule (losowanie bez zwracania). Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że wylosowano kule trzech różnych kolorów. Podaj w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(5) = \mathbf{25/91}$

b) $P(3) = \mathbf{9/28}$

c) $P(2) = \mathbf{2/5}$

d) $P(4) = \mathbf{16/55}$

12. Zdarzenia losowe A , B , C i D są niezależne. Dla podanych prawdo-podobieństw $P(A \cap B)$, $P(B \cap C)$ i $P(C \cap D)$ podaj $P(A \cap D)$, o ile istnieją niezależne zdarzenia A , B , C i D spełniające podane warunki. Wpisz **NIE**, jeśli takie zdarzenia nie istnieją.

a) $P(A \cap B) = 1/2, \quad P(B \cap C) = 1/4, \quad P(C \cap D) = 1/2,$
 $P(A \cap D) = \mathbf{1}$

b) $P(A \cap B) = 1/2, \quad P(B \cap C) = 1/3, \quad P(C \cap D) = 1/2,$
 $P(A \cap D) = \mathbf{3/4}$

c) $P(A \cap B) = 1/2, \quad P(B \cap C) = 2/3, \quad P(C \cap D) = 1/2,$
 $P(A \cap D) = \mathbf{3/8}$

d) $P(A \cap B) = 1/2, \quad P(B \cap C) = 1/5, \quad P(C \cap D) = 1/2,$
 $P(A \cap D) = \mathbf{NIE}$

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

1. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{4n} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{4n+4} \right) = \mathbf{16 - e^4}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \right) = \mathbf{2 - e}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{3n+3} \right) = \mathbf{8 - e^3}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{2n+2} \right) = \mathbf{4 - e^2}$

2. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = e^{x^3} + e^{x^5}.$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(66)}(0) = \frac{\mathbf{66!}}{\mathbf{22!}}$

b) $f^{(60)}(0) = \frac{\mathbf{60!}}{\mathbf{20!}} + \frac{\mathbf{60!}}{\mathbf{12!}}$

c) $f^{(65)}(0) = \frac{\mathbf{65!}}{\mathbf{13!}}$

d) $f^{(63)}(0) = \frac{\mathbf{63!}}{\mathbf{21!}}$

3. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p , dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^{2p} + x^p}}{x^9 + x^5} dx, \quad \mathbf{\emptyset}$

b) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^{2p} + x^p}}{x^7 + x^3} dx, \quad \mathbf{(4, 6)}$

c) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^{2p} + x^p}}{x^8 + x^4} dx, \quad \mathbf{(6, 7)}$

d) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^{2p} + x^p}}{x^6 + x^2} dx, \quad \mathbf{(2, 5)}$

4. Podaj wartość granicy.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^5 n^6}{k^{12} + n^{12}} = \frac{\pi}{24}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^8 n^9}{k^{18} + n^{18}} = \frac{\pi}{36}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^6 n^7}{k^{14} + n^{14}} = \frac{\pi}{28}$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^7 n^8}{k^{16} + n^{16}} = \frac{\pi}{32}$$

5. Podaj w możliwie prostej postaci takie wyrażenia A , B , C , D , aby dla każdej funkcji ciągłej $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

$$\text{a) } \int_0^1 \int_x^{2-x} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

$$A = \pi/4 \quad B = \pi/2 \quad C = 0 \quad D = \frac{2}{\cos \varphi + \sin \varphi} = \frac{\sqrt{2}}{\cos(\varphi - \frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{\sin(\varphi + \frac{\pi}{4})}$$

$$\text{b) } \int_0^2 \int_0^{2-x} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

$$A = 0 \quad B = \pi/2 \quad C = 0 \quad D = \frac{2}{\cos \varphi + \sin \varphi} = \frac{\sqrt{2}}{\cos(\varphi - \frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{\sin(\varphi + \frac{\pi}{4})}$$

$$\text{c) } \int_0^1 \int_1^{2-x} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

$$A = \pi/4 \quad B = \pi/2 \quad C = 1/\sin \varphi \quad D = \frac{2}{\cos \varphi + \sin \varphi} = \frac{\sqrt{2}}{\cos(\varphi - \frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{\sin(\varphi + \frac{\pi}{4})}$$

$$\text{d) } \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

$$A = 0 \quad B = \pi/4 \quad C = 1/\cos \varphi \quad D = \frac{2}{\cos \varphi + \sin \varphi} = \frac{\sqrt{2}}{\cos(\varphi - \frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{\sin(\varphi + \frac{\pi}{4})}$$

6. Niech $z = (1 - i) \cdot (1 + \sqrt{3} \cdot i)$. Zapisz w postaci kartezjańskiej:

a) $z^{51} = 2^{76} + 2^{76} \cdot i$

b) $z^{66} = -2^{99} \cdot i$

c) $z^{54} = 2^{81} \cdot i$

d) $z^{60} = -2^{90}$

7. Dla podanej liczby λ podaj taką liczbę a , aby λ była wartością własną macierzy $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) $\lambda = 5, \quad a = 10$

b) $\lambda = 1, \quad a = -2$

c) $\lambda = 4, \quad a = 4$

d) $\lambda = 2, \quad a = -2$

8. Dla podanej jednej z liczb a, b i c wskaż pozostałe liczby tak, aby wektor (a, b, c) był prostopadły do wektorów $(-2, 3, 6)$ i $(6, -2, 3)$.

a) $a = 4, \quad b = 8, \quad c = -8/3$

b) $a = 1, \quad b = 2, \quad c = -2/3$

c) $a = -9/2, \quad b = -9, \quad c = 3$

d) $a = 1, \quad b = 2, \quad c = -2/3$

9. Niech $C(n)$ będzie liczbą ideałów w pierścieniu $\mathbb{Z}$ zawierających liczbę n^3 . Wówczas

a) $C(28) = 28$

b) $C(27) = 10$

c) $C(25) = 7$

d) $C(26) = 16$

10. Dla podanej liczby k podaj najmniejszą taką liczbę naturalną n , że w grupie permutacji S_n istnieje element rzędu k .

a) $k = 47, \quad n = \mathbf{47}$

b) $k = 50, \quad n = \mathbf{27}$

c) $k = 48, \quad n = \mathbf{19}$

d) $k = 49, \quad n = \mathbf{49}$

11. W urnie znajduje się $3n$ kul, po n każdego z trzech kolorów: amaran-towego, białego i czarnego. Losujemy z urny trzy kule (losowanie bez zwracania). Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że wylosowano kule trzech różnych kolorów. Podaj w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(5) = \mathbf{25/91}$

b) $P(2) = \mathbf{2/5}$

c) $P(4) = \mathbf{16/55}$

d) $P(3) = \mathbf{9/28}$

12. Zdarzenia losowe A , B , C i D są niezależne. Dla podanych prawdo-podobieństw $P(A \cap B)$, $P(B \cap C)$ i $P(C \cap D)$ podaj $P(A \cap D)$, o ile istnieją niezależne zdarzenia A , B , C i D spełniające podane warunki. Wpisz **NIE**, jeśli takie zdarzenia nie istnieją.

a) $P(A \cap B) = 1/2, \quad P(B \cap C) = 2/3, \quad P(C \cap D) = 1/2,$
 $P(A \cap D) = \mathbf{3/8}$

b) $P(A \cap B) = 1/2, \quad P(B \cap C) = 1/3, \quad P(C \cap D) = 1/2,$
 $P(A \cap D) = \mathbf{3/4}$

c) $P(A \cap B) = 1/2, \quad P(B \cap C) = 1/5, \quad P(C \cap D) = 1/2,$
 $P(A \cap D) = \mathbf{NIE}$

d) $P(A \cap B) = 1/2, \quad P(B \cap C) = 1/4, \quad P(C \cap D) = 1/2,$
 $P(A \cap D) = \mathbf{1}$