

**EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2026 r.**  
**Matematyka w ekonomii**

*Zadanie* **1.** (8 punktów)

Rozważ dane opisujące zależność zużycia paliwa  $Y$  (w litrach na 100 km) od masy samochodu  $X$  (w tonach). Otrzymano następujące wyniki:

$X(t)$	1,0	1,2	1,5	1,8	2,0
$Y(1/100 \text{ km})$	5,5	6,0	6,8	7,2	7,6

- (i) Metodą najmniejszych kwadratów wyznacz prostą regresji liniowej zmiennej  $Y$  względem zmiennej  $X$ .
- (ii) Oszacuj zużycie paliwa dla samochodu o masie 1,6 t.

*Zadanie* **2.** (8 punktów)

Niech  $X_1, \dots, X_n$  będzie próbą z rozkładu Poissona z parametrem  $\lambda$ . Wyznacz estymator największej wiarygodności tego parametru. Czy otrzymany estymator jest estymatorem nieobciążonym o minimalnej wariancji? Odpowiedź uzasadnij.

*Zadanie* **3.** (8 punktów)

Dany jest szereg czasowy  $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$  opisany modelem:

$$X_t = 2 + 0,6X_{t-1} + W_t,$$

gdzie  $\{W_t : t \in \mathbb{Z}\}$  jest białym szumem o wartości oczekiwanej  $\mathbf{E}(W_t) = 0$  oraz wariancji  $\mathbf{Var}(W_t) = \sigma^2$ .

- (i) Sprawdź, czy proces  $\{X_t\}$  jest stacjonarny.
- (ii) Wyznacz wartość oczekiwaną  $\mathbf{E}(X_t)$ .
- (iii) Oblicz wariancję  $\mathbf{Var}(X_t)$ .
- (iv) Wyznacz  $\gamma(k)$ , funkcję autokowariancji procesu  $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ .

*Zadanie* **4.** (8 punktów)

Niech  $Z_1, Z_2$  będą dwoma niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu normalnego  $N(0, 1)$ . W każdym z poniższych podpunktów swoją odpowiedź dokładnie uzasadnij!

1. (1 pkt.) Podaj gęstość wektora losowego  $(Z_1, Z_2)$  w  $\mathbb{R}^2$ .
2. (1 pkt.) Wyznacz rozkład zmiennej losowej  $Z_1 + Z_2$  podając jej gęstość.
3. (2 pkt.) Wyznacz rozkład zmiennej losowej  $Z_1^2 + Z_2^2$  podając jej gęstość.
4. (4 pkt.) Oblicz

$$\mathbb{P}(Z_1 + Z_2 > 0 \mid Z_1 > 0).$$

*Wskazówka:* Możesz uzasadnić i wykorzystać poniższy wzór:

$$\mathbb{P}(Z_1 + Z_2 > 0, Z_1 > 0) = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(Z_2 > -y) f_{Z_1}(y) dy.$$

**EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2026 r.**  
**Nauczycielska**

*Zadanie* **1.** (8 punktów)

Oblicz granicę całek

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,1]} \frac{\sin(x^n)}{1 + nx^2} d\lambda(x),$$

gdzie  $\lambda$  oznacza miarę Lebesgue'a. Jeśli korzystasz z jakiegoś twierdzenia, zacytuj je i sprawdź jego założenia

*Zadanie* **2.** (8 punktów)

Oblicz liczbę  $x$  daną w postaci ułamka łańcuchowego:

$$x = \frac{3}{2 + \frac{5}{2 + \frac{5}{2 + \frac{5}{2 + \frac{5}{\ddots}}}}}$$

Wynik przedstaw w możliwie najprostszej postaci. Sprawdź, czy  $x$  jest liczbą algebraiczną.

*Zadanie* **3.** (8 punktów)

W modelu Kleina lub w modelu półpłaszczyznowym Poincaré'go płaszczyzny nieeuklidesowej znajdź i opisz (narysuj) przykład:

1. jakiegokolwiek czworokąta idealnego o dwóch przeciwległych wierzchołkach idealnych i dwóch pozostałych przeciwległych wierzchołkach zwyczajnych;
2. czworokąta jak w punkcie (1), który dodatkowo ma kąty wewnętrzne proste w obu wierzchołkach zwyczajnych.

Uzasadnij poprawność swoich przykładów przypominając interpretację odpowiednich pojęć w wybranym do rozwiązania modelu.

*Zadanie* **4.** (8 punktów)

Dla zbioru  $X$  symbolem  $\mathcal{P}(X)$  oznaczamy rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru  $X$ , czyli zbiór potęgowy zbioru  $X$ .

Czy prawdą jest że jeśli  $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \cap \mathcal{P}(C)$  to  $A \subseteq B \cap C$ ?

Czy prawdą jest że jeśli  $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \cup \mathcal{P}(C)$  to  $A \subseteq B \cup C$ ?

Odpowiedzi uzasadnij.

**EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2026 r.**  
**Matematyka stosowana**

*Zadanie* **1.** (8 punktów)

Określ, dla jakich wartości parametru  $a \in \mathbb{R}$  rozwiązanie zerowe podanego układu równań różniczkowych jest stabilne

$$x' = ax - 2y + x^2, \quad y' = x + y + xy; \quad (1)$$

*Zadanie* **2.** (8 punktów)

Rozważmy model Lotki-Volterry opisujący ewolucję liczby drapieżników ( $y(t)$ ) i ofiar ( $x(t)$ ), tzn. układ postaci:

$$\begin{cases} x'(t) = (b - ay)x, \\ y'(t) = (cx - d)y. \end{cases}$$

Zmodyfikuj powyższy model, tak, by uwzględnić wprowadzenie:

- a) proporcjonalnych odłowów ofiar.
- b) proporcjonalnych odłowów drapieżników.

Dla każdego z tak zmodyfikowanych modeli:

1. Zbadaj zachowanie rozwiązań w I ćwiartce.
2. Wyznacz wszystkie wartości odłowów dla których badana populacja (ofiary lub drapieżniki) wyginie. Uzasadnij, w uzasadnieniu można powołać się bez dowodzenia na fakty związane z modelem Lotki-Volterry.

Można skorzystać z wiedzy na temat portretu fazowego oryginalnego układu Lotki-Volterry.

*Zadanie* **3.** (8 punktów)

W pojedynczej grze możliwe wyniki 1 i 2 mogą wystąpić z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{2}$ . Gra powtarzana jest niezależnie a wyniki z poszczególnych rozgrywek są sumowane.

- (i) Zaproponuj model matematyczny opisujący przebieg nieskończonej rozgrywki.

- (ii) Niech  $p(m)$  będzie prawdopodobieństwem uzyskania **dokładnie**  $m$  punktów na pewnym etapie gry, to znaczy, że suma punktów uzyskanych na tym etapie gry jest równa dokładnie  $m$ . Oblicz  $p(1)$  i  $p(2)$ .
- (iii) Wyznacz wzór dla  $p(m)$ .
- (iv) Przeanalizuj jak zachowuje się  $p(m)$  gdy  $m$  staje się duże. Zinterpretuj wynik swojej analizy.

*Zadanie* **4**. (8 punktów)

Niech  $Z_1, Z_2$  będą dwoma niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu normalnego  $N(0, 1)$ . W każdym z poniższych podpunktów swoją odpowiedź dokładnie uzasadnij!

1. (1 pkt.) Podaj gęstość wektora losowego  $(Z_1, Z_2)$  w  $\mathbb{R}^2$ .
2. (1 pkt.) Wyznacz rozkład zmiennej losowej  $Z_1 + Z_2$  podając jej gęstość.
3. (2 pkt.) Wyznacz rozkład zmiennej losowej  $Z_1^2 + Z_2^2$  podając jej gęstość.
4. (4 pkt.) Oblicz

$$\mathbb{P}(Z_1 + Z_2 > 0 \mid Z_1 > 0).$$

*Wskazówka:* Możesz uzasadnić i wykorzystać poniższy wzór:

$$\mathbb{P}(Z_1 + Z_2 > 0, Z_1 > 0) = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(Z_2 > -y) f_{Z_1}(y) dy.$$

**EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2026 r.**  
**Matematyka teoretyczna**

**Zadanie 1. (8 punktów)**

Oblicz granicę całek

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,1]} \frac{\sin(x^n)}{1 + nx^2} d\lambda(x),$$

gdzie  $\lambda$  oznacza miarę Lebesgue'a. Jeśli korzystasz z jakiegoś twierdzenia, zacytuj je i sprawdź jego założenia

**Zadanie 2. (8 punktów)**

- (a) (1pkt) Podać definicję  $p$ -podgrupy Sylowa skończonej grupy  $G$ .
- (b) (3pkt) Udowodnić, że każda grupa rzędu 700 ma dzielnik normalny rzędu 25.
- (c) (4pkt) Wyznaczyć (z uzasadnieniem!) liczbę 5-podgrup Sylowa grupy  $A_5$  (czyli grupy permutacji parzystych zbioru  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ).

. Wsk. W podpunktach (b) i (c) można korzystać z twierdzeń Sylowa.

**Zadanie 3. (8 punktów)**

Niech  $X$  będzie zmienną losową o rozkładzie będącym mieszaniną: z prawdopodobieństwem  $p$  ma rozkład  $N(0, 1)$ , a z prawdopodobieństwem  $1 - p$  ma rozkład  $N(0, \sigma^2)$ ,  $\sigma > 0$ .

- a) Wyznacz funkcję charakterystyczną  $X$ .
- b) Oblicz  $\mathbb{E}[X^4]$  korzystając z funkcji charakterystycznej.
- c) Dla jakiej wartości  $p$  zmienna  $X$  ma rozkład normalny? Uzasadnij.

**Zadanie 4. (8 punktów)**

- 1. Dla  $1 < p < \infty$  rozważmy przestrzeń  $X = L^p(0, 1)$  z normą  $\|f\|_p = \left( \int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$ . Dla  $\alpha > 0$  rozważmy ciąg funkcji  $f_n \in X$  zadany

przez

$$f_n(x) = \begin{cases} n^\alpha & \text{dla } x \in (0, 1/n) \\ 0 & \text{dla } x \in [1/n, 1) \end{cases}.$$

- (a) Uzasadnij, że dla  $\alpha < 1/p$  ciąg  $f_n$  jest zbieżny do zera w normie przestrzeni  $X$ .
- (b) Uzasadnij, że dla  $\alpha = 1/p$  ciąg  $f_n$  jest słabo zbieżny do zera, ale nie jest zbieżny w normie przestrzeni  $X$ .
- (c) Uzasadnij, że dla  $\alpha > 1/p$  ciąg  $f_n$  nie jest słabo zbieżny.
- (d) Na przestrzeni  $Y = L^p(1, \infty)$  podaj przykład ciągu funkcji ograniczonych  $g_n$ , który jest słabo zbieżny, ale nie jest zbieżny w normie.

**EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2026 r.**  
**Analiza danych**

*Zadanie* **1.** (8 punktów)

- a) Przeprowadzono 200 testów, każdy na poziomie istotności 0.2. Hipotezy  $H_{10}$ ,  $H_{50}$ ,  $H_{70}$ ,  $H_{125}$ ,  $H_{150}$  są fałszywe (prawdziwą jest alternatywna hipoteza).
- [2 pkt] | Oblicz oczekiwaną liczbę fałszywych odkryć. Jaka jest oczekiwana liczba fałszywych odkryć po zastosowaniu procedury Bonferonniego?
- [2 pkt] | Oblicz wartość wskaźnika FWER po zastosowaniu procedury Bonferonniego.
- b) [4 pkt] Wektor (0.005, 0.025, 0.011, 0.085, 0.411, 0.163, 0.112, 0.102, 0.225, 0.749) zawiera ciąg p-wartości dla niezależnych hipotez  $H_1, \dots, H_{10}$ ,  $\alpha = 0.2$ . Wykonaj procedurę wielokrotnego testowania Benjaminiego-Hochberga, że kontroluje wskaźnik FDR na poziomie  $\alpha$  i zgłoś liczbę odrzuconych hipotez. Czy zastosowana procedura na pewno będzie kontrolować FWER na poziomie  $\alpha$ ?

*Zadanie* **2.** (8 punktów)

Gęstość rozkładu wektora losowego  $X = (X_1, X_2)^T$  ma postać

$$f(x_1, x_2) = \frac{3}{4}x_1^{-\frac{1}{2}}, \quad 0 < x_1 < x_2 < 1.$$

Oblicz

$$P(X_1 < 0, 25), \quad P(X_2 < 0, 25), \quad P(X_2 < 0, 25 | X_1 < 0, 25).$$

*Zadanie* **3.** (8 punktów)

Niech  $X_1, \dots, X_n$  będzie próbą z rozkładu Poissona z parametrem  $\lambda$ . Wyznacz estymator największej wiarygodności tego parametru. Czy otrzymany estymator jest estymatorem nieobciążonym o minimalnej wariancji? Odpowiedź uzasadnij.

*Zadanie* **4.** (8 punktów)

Niech  $Z_1, Z_2$  będą dwoma niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu normalnego  $N(0, 1)$ . W każdym z poniższych podpunktów swoją odpowiedź dokładnie uzasadnij!

1. (1 pkt.) Podaj gęstość wektora losowego  $(Z_1, Z_2)$  w  $\mathbb{R}^2$ .
2. (1 pkt.) Wyznacz rozkład zmiennej losowej  $Z_1 + Z_2$  podając jej gęstość.
3. (2 pkt.) Wyznacz rozkład zmiennej losowej  $Z_1^2 + Z_2^2$  podając jej gęstość.
4. (4 pkt.) Oblicz

$$\mathbb{P}(Z_1 + Z_2 > 0 \mid Z_1 > 0).$$

*Wskazówka:* Możesz uzasadnić i wykorzystać poniższy wzór:

$$\mathbb{P}(Z_1 + Z_2 > 0, Z_1 > 0) = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(Z_2 > -y) f_{Z_1}(y) dy.$$

**EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2026 r.**  
**Aktuarialno-finansowa**

**Zadanie 1. (8 punktów)**

Niech  $\{B_i(t) : t \geq 0\}$ ,  $i = 1, 2, \dots$  będą wzajemnie niezależnymi standardowymi procesami Wienera określonymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej.

a) Znaleźć stałą  $C > 0$  taką, że proces stochastyczny

$$Y(t) := C \sum_{k=1}^{\infty} B_k \left( \frac{t}{2^{k-1}} \right), \quad t \geq 0$$

jest standardowym procesem Wienera.

b) Załóżmy, że  $n \in N$  oraz  $s, t \geq 0$ . Ile wynosi

$$\text{Cov}(B_n(s), Y(t))?$$

Odpowiedzi uzasadnić.

**Zadanie 2. (8 punktów)**

Niech  $Z_1, Z_2$  będą dwoma niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu normalnego  $N(0, 1)$ . W każdym z poniższych podpunktów swoją odpowiedź dokładnie uzasadnij!

1. (1 pkt.) Podaj gęstość wektora losowego  $(Z_1, Z_2)$  w  $\mathbb{R}^2$ .
2. (1 pkt.) Wyznacz rozkład zmiennej losowej  $Z_1 + Z_2$  podając jej gęstość.
3. (2 pkt.) Wyznacz rozkład zmiennej losowej  $Z_1^2 + Z_2^2$  podając jej gęstość.
4. (4 pkt.) Oblicz

$$\mathbb{P}(Z_1 + Z_2 > 0 \mid Z_1 > 0).$$

*Wskazówka:* Możesz uzasadnić i wykorzystać poniższy wzór:

$$\mathbb{P}(Z_1 + Z_2 > 0, Z_1 > 0) = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(Z_2 > -y) f_{Z_1}(y) dy.$$

**Zadanie 3. (8 punktów)**

Niech  $X$  będzie zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem  $\lambda > 0$ . Dla  $\alpha \in (0, 1)$  wyprowadź wzory na:

(a) (4 pkt)  $\text{VaR}_\alpha(X)$ ,

(b) (4 pkt)  $\text{TVaR}_\alpha(X)$ .

*Zadanie* **4.** (8 punktów)

Rozważmy portfel złożony z dwóch opcji europejskich waniliowych na to samo aktywo bazowe: 1 akcję spółki XYZ, która nie wypłaca dywidend. Obie opcje mają tę samą zapadalność  $T$  i cenę wykonania  $K$ . Jedna z nich to opcja kupna, którą posiadamy w pozycji długiej, a druga to opcja sprzedaży, którą posiadamy w pozycji krótkiej. Załóżmy, że  $T = 10$  oraz że efektywna roczna stopa procentowa wolna od ryzyka wynosi  $r = 0.02$ . Zadania:

- Wyznacz  $K$  wiedząc, że wartość tego portfela w chwili 0 jest równa 0, a cena spot aktywa bazowego wynosi  $S_0 = 100$ . (6 pkt)
- Wyznacz deltę i gammę tego portfela w chwili 0. (2 pkt)