

EGZAMIN MAGISTERSKI, 8.09.2025 r.
Matematyka w ekonomii

Zadanie 1. (8 punktów)

Rozważmy model regresji liniowej postaci: $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i^2 + \epsilon_i$.
Wyznacz estymatory najmniejszych kwadratów parametrów β_0 oraz β_1 .

Zadanie 2. (8 punktów)

Niech $X_1, \dots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $N(0, \theta)$, gdzie $\theta = EX_1^2$. Wyznacz estymator największej wiarygodności parametru $\eta = \theta^2$. Czy uzyskany estymator jest estymatorem nieobciążonym o minimalnej wariancji? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 3. (8 punktów)

Niech $\{W_t : t \in \mathbb{Z}\}$ będzie ciągiem niezależnych jednakowo rozłożonych zmiennych losowych o średniej zero i skończonej wariancji $\sigma^2 > 0$.

(i) Pokaż, że szereg czasowy $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$, zdefiniowany jako

$$X_t = W_t + \theta W_{t-1}, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

jest **ściśle stacjonarny**.

(ii) Niech $m(\lambda) = E \exp(\lambda W_t)$ będzie funkcja tworząca momenty zmiennej losowej W_t .

Wyraż funkcję tworzącą wektora $(X_1, \dots, X_k)$, czyli funkcję

$$m_{(X_1, \dots, X_k)}(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = E \exp \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i X_i \right),$$

przy pomocy funkcji m .

(iii) Czy wynik z punktu (ii) można wykorzystać do odpowiedzi na pytanie z punktu (i)? Uzasadnij swoją odpowiedź na powyższe pytanie.

Zadanie 4. (8 punktów)

Niech X_n będzie zmienną losową opisującą liczbę orłów w n rzutach symetryczną monetą, a Y_n niech będzie niezależną od X_n zmienną losową opisującą liczbę orłów w $n + 1$ rzutach symetryczną monetą.

1. (1 pkt) Czy rozkład zmiennej losowej $X_n - Y_n$ jest rozkładem dwumianowym?

Swoją odpowiedź uzasadnij.

2. (2 pkt) Znajdź $\mathbb{P}(X_n < Y_n)$. W tym celu udowodnij, że $\mathbb{P}(X_n < Y_n) = \mathbb{P}(n - X_n < n + 1 - Y_n)$.

3. (1 pkt) Jaki rozkład ma zmienna losowa $X_n + Y_n$?

Swoją odpowiedź uzasadnij.

4. (2 pkt) Czy zmienne losowe $X_n + Y_n$ oraz $X_n - Y_n$ są niezależne?

Swoją odpowiedź uzasadnij.

5. (2 pkt) Oblicz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Corr}(X_n + Y_n, X_n - Y_n).$$

EGZAMIN MAGISTERSKI, 8.09.2025 r.
Nauczycielska

Zadanie 1. (8 punktów)

Na zbiorze $Y = (-1, +\infty)$ definiujemy odwzorowanie

$$d(x, y) = |\ln(x+1) - \ln(y+1)|, \quad x, y \in Y. \quad (1)$$

1. (3p) Wykaż, że (Y, d) jest przestrzenią metryczną.
2. (2p) Wyznacz kulę otwartą o środku 0 i promieniu 1 w tej przestrzeni metrycznej.
3. (3p) Mówimy, że dwie metryki d_1 i d_2 określone na tej samej przestrzeni X są *topologicznie równoważne*, jeśli dla dowolnego ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ i dowolnego $x \in X$ zachodzi: $x_n \rightarrow x$ w metryce d_1 wtedy i tylko wtedy, gdy $x_n \rightarrow x$ w metryce d_2 .

Sprawdź, czy metryka d dana wzorem (1) jest równoważna metryce euklidesowej dziedziczonej na Y z $\mathbb{R}$.

Zadanie 2. (8 punktów)

Oblicz liczbę x daną w postaci ułamka łańcuchowego:

$$x = \frac{1}{5 + \frac{7}{3 + \frac{2}{3 + \frac{2}{3 + \frac{2}{\ddots}}}}}$$

Wynik przedstaw w możliwie najprostszej postaci. Sprawdź, czy x jest liczbą algebraiczną.

Zadanie 3. (8 punktów)

Wyznacz objętość czworościanu foremego (platońskiego) o krawędziach długości a .

Zadanie **4.** (8 punktów)

Mamy dane dwie funkcje $f, g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ oznacza zbiór liczb całkowitych), przy czym wiemy, że złożenie $f \circ g$ jest bijekcją.

- 1) Udowodnij, że funkcja g jest różnowartościowa, a f jest funkcją „na”.
- 2) Podaj przykład takiej pary funkcji $f, g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, że f, g nie są bijekcjami, natomiast ich złożenie $f \circ g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ jest bijekcją.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 8.09.2025 r.
Matematyka stosowana

Zadanie **1. (8 punktów)**

Dla jakich wartości parametru $\lambda \in \mathbb{R}$, równanie całkowe

$$u(x) = x + \lambda \int_a^b \sin(u(y) + x) dy$$

ma rozwiązanie w przestrzeni funkcji ciągłych $u \in C([a, b])$?

Zadanie **2. (8 punktów)**

Zbiornik ma stałą objętość V (mierzona w m^3) i zawiera w czasie t masę $Q(t)$ substancji zanieczyszczającej mierzoną w kg . Masa początkowa w chwili $t = 0$ wynosi Q_0 . Zakładamy, że zanieczyszczenie jest równomiernie rozmieszczone w całym zbiorniku, a więc jego stężenie w każdym miejscu w jeziorze jest takie samo. Zakładamy, że do jeziora wpływa w tempie r_I (w m^3/rok) zanieczyszczona woda zawierająca stałe stężenie c_0 zanieczyszczeń oraz że woda opuszcza zbiornik w tempie r_O . Przyjmujemy również, że jezioro może przyjąć nieskończoną ilość wody.

1. Wyznacz równanie opisujące ewolucję zanieczyszczenia $Q(t)$ i znajdź jego rozwiązanie dla $r_I = r_O$?
2. Jeśli zakończone zostanie wprowadzanie zanieczyszczeń do jeziora, czyli gdy $c_0 = 0$, to jaki czas upłynie zanim masa zanieczyszczeń zostanie zredukowana o połowę, jeśli $r_I = r_O$?

Zadanie **3. (8 punktów)**

Adam ma przenośne radio, które działa na jednej baterii. Gdy tylko używana bateria się rozładuje, Adam natychmiast wymienia ją na nową.

- (i) Jeśli czas pracy baterii (w godzinach) jest równomiernie rozłożony w przedziale $(30, 60)$, to jak często Adam musi wymieniać baterie?
- (ii) Załóżmy, że Adam nie przechowuje żadnych nadwyżek baterii, więc za każdym razem, gdy wystąpi awaria, musi iść i kupić nową baterię. Jeśli czas potrzebny na wymianę baterii jest równomiernie rozłożony w

przedziale $(0, 1)$, to jakie jest średnie tempo, w jakim Adam wymienia baterię?

Zadanie **4.** (8 punktów)

Niech X_n będzie zmienną losową opisującą liczbę orłów w n rzutach symetryczną monetą, a Y_n niech będzie niezależną od X_n zmienną losową opisującą liczbę orłów w $n + 1$ rzutach symetryczną monetą.

1. (1 pkt) Czy rozkład zmiennej losowej $X_n - Y_n$ jest rozkładem dwumianowym?
Swoją odpowiedź uzasadnij.
2. (2 pkt) Znajdź $\mathbb{P}(X_n < Y_n)$. W tym celu udowodnij, że $\mathbb{P}(X_n < Y_n) = \mathbb{P}(n - X_n < n + 1 - Y_n)$.
3. (1 pkt) Jaki rozkład ma zmienna losowa $X_n + Y_n$?
Swoją odpowiedź uzasadnij.
4. (2 pkt) Czy zmienne losowe $X_n + Y_n$ oraz $X_n - Y_n$ są niezależne?
Swoją odpowiedź uzasadnij.
5. (2 pkt) Oblicz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Corr}(X_n + Y_n, X_n - Y_n).$$

EGZAMIN MAGISTERSKI, 8.09.2025 r.
Matematyka teoretyczna

Zadanie 1. (8 punktów)

Na zbiorze $Y = (-1, +\infty)$ definiujemy odwzorowanie

$$d(x, y) = |\ln(x + 1) - \ln(y + 1)|, \quad x, y \in Y. \quad (1)$$

1. (3p) Wykaż, że (Y, d) jest przestrzenią metryczną.
2. (2p) Wyznacz kulę otwartą o środku 0 i promieniu 1 w tej przestrzeni metrycznej.
3. (3p) Mówimy, że dwie metryki d_1 i d_2 określone na tej samej przestrzeni X są *topologicznie równoważne*, jeśli dla dowolnego ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ i dowolnego $x \in X$ zachodzi: $x_n \rightarrow x$ w metryce d_1 wtedy i tylko wtedy, gdy $x_n \rightarrow x$ w metryce d_2 .

Sprawdź, czy metryka d dana wzorem (1) jest równoważna metryce euklidesowej dziedziczonej na Y z $\mathbb{R}$.

Zadanie 2. (8 punktów)

Założmy, że w zbiorze G określone jest łączne działanie $\cdot$ takie, że $\cdot$ ma lewostronny element neutralny e oraz każdy element $x \in G$ ma lewostronny element odwrotny względem e . Udowodnić, że:

(a) dla każdych $x, y \in G$, jeśli y jest lewostronnym elementem odwrotnym do x względem e , to jest on też prawostronnym elementem odwrotnym do x względem e ,

(b) e jest również prawostronnym elementem neutralnym działania $\cdot$.

Zadanie 4. (8 punktów)

Niech $(B_t)_{t \geq 0}$ będzie standardowym ruchem Browna. Uzasadnij

$$\mathbb{P}[B_t > 1 \text{ dla pewnego } t] = 1.$$

Zadanie 4. (8 punktów)

Niech c_0 oznacza przestrzeń zespolonych ciągów zbieżnych do zera z normą $\|(x_1, x_2, \dots)\|_\infty = \sup_{n \geq 1} |x_n|$, natomiast l^1 oznacza przestrzeń ciągów zespolonych dla których norma $\|(x_1, x_2, \dots)\|_1 = \sum_{n=1}^\infty |x_n|$ jest skończona.

1. Znajdź normę funkcjonału $\phi : c_0 \rightarrow \mathbb{C}$ zadanego przez

$$\phi(x_1, x_2, \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x_n.$$

2. Uzasadnij, że nie istnieje ciąg $x \in c_0$ o normie 1 taki że $|\phi(x)| = \|\phi\|_{c_0 \rightarrow \mathbb{C}}$.

3. Znajdź normę funkcjonału $\psi : l^1 \rightarrow \mathbb{C}$ zadanego przez

$$\psi(x_1, x_2, \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) x_n.$$

4. Uzasadnij, że nie istnieje ciąg $x \in l^1$ o normie 1 taki że $|\psi(x)| = \|\psi\|_{l^1 \rightarrow \mathbb{C}}$.

Zadanie **4.** (8 punktów)

Dla jakich wartości parametru $\lambda \in \mathbb{R}$, równanie całkowe

$$u(x) = x + \lambda \int_a^b \sin(u(y) + x) dy$$

ma rozwiązanie w przestrzeni funkcji ciągłych $u \in C([a, b])$?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 8.09.2025 r.
Analiza danych

Zadanie **1.** (8 punktów)

- a) Wektor $(0.24, 0.12, 0.045, 0.01, 0.21, 0.048, 0.33, 0.0007, 0.16, 0.031)$ zawiera ciąg p-wartości dla niezależnych hipotez $H_1, \dots, H_{10}$ i niech $\alpha = 0.1$.

(3 pkt) Wykonaj procedurę wielokrotnego testowania Holma, do kontroli FWER na poziomie α i podaj liczbę odrzuconych hipotez. Czy zastosowana procedura na pewno będzie kontrolować FDR na poziomie α ?

(3 pkt) Wykonaj procedurę wielokrotnego testowania Benjaminiego-Hochberga, do kontroli FDR na poziomie α i podaj liczbę odrzuconych hipotez. Czy zastosowana procedura na pewno będzie kontrolować FWER na poziomie α ?

- b) (2 pkt) Wartość statystyki Fishera dla testowania zera globalnego $H_0 = \bigcap_{i=1}^{10} H_{0i}$ wynosi 59. Podaj wzór na p-wartość dla tego testu.

Zadanie **2.** (8 punktów)

Niech $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^\top \sim N_2(\mu, \Sigma)$, przy czym $\mu = (2, -1)^\top$ oraz $\Sigma = \text{diag}\{4, 3\}$. Niech $\mathbf{a} = (-1, 3)^\top$, $\mathbf{b} = (4, -1)^\top$. Jaki jest łączny rozkład wektora losowego $(\mathbf{a}^\top \mathbf{X}, \mathbf{b}^\top \mathbf{X})^\top$? Czy zmienne losowe $\mathbf{a}^\top \mathbf{X}$ oraz $\mathbf{b}^\top \mathbf{X}$ są niezależne? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie **3.** (8 punktów)

Niech $X_1, \dots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $N(0, \theta)$, gdzie $\theta = EX_1^2$. Wyznacz estymator największej wiarygodności parametru $\eta = \theta^2$. Czy uzyskany estymator jest estymatorem nieobciążonym o minimalnej wariancji? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie **4.** (8 punktów)

Niech X_n będzie zmienną losową opisującą liczbę orłów w n rzutach symetryczną monetą, a Y_n niech będzie niezależną od X_n zmienną losową opisującą liczbę orłów w $n + 1$ rzutach symetryczną monetą.

1. (1 pkt) Czy rozkład zmiennej losowej $X_n - Y_n$ jest rozkładem dwumianowym?
Swoją odpowiedź uzasadnij.
2. (2 pkt) Znajdź $\mathbb{P}(X_n < Y_n)$. W tym celu udowodnij, że $\mathbb{P}(X_n < Y_n) = \mathbb{P}(n - X_n < n + 1 - Y_n)$.
3. (1 pkt) Jaki rozkład ma zmienna losowa $X_n + Y_n$?
Swoją odpowiedź uzasadnij.
4. (2 pkt) Czy zmienne losowe $X_n + Y_n$ oraz $X_n - Y_n$ są niezależne?
Swoją odpowiedź uzasadnij.
5. (2 pkt) Oblicz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Corr}(X_n + Y_n, X_n - Y_n).$$

EGZAMIN MAGISTERSKI, 8.09.2025 r.
Aktuarialno-finansowa

Zadanie **1. (8 punktów)**

Niech $\{B_i(t) : t \geq 0\}$, $i = 1, 2, \dots$ będą wzajemnie niezależnymi standardowymi procesami Wienera określonymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej.

a) Znaleźć funkcję $h(\cdot) : N \rightarrow R$ taką, że dla każdego $n \in N$ proces stochastyczny

$$Y_n(t) := \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^k B_k(kt)}{h(n)}, \quad t \geq 0$$

jest standardowym procesem Wienera.

b) Załóżmy, że $n \in N$ oraz $s, t \geq 0$. Ile wynosi

$$\text{Cov}(B_{2n+1}(s), Y_{2n+2}(t))?$$

Odpowiedzi uzasadnić.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Niech X_n będzie zmienną losową opisującą liczbę orłów w n rzutach symetryczną monetą, a Y_n niech będzie niezależną od X_n zmienną losową opisującą liczbę orłów w $n + 1$ rzutach symetryczną monetą.

1. (1 pkt) Czy rozkład zmiennej losowej $X_n - Y_n$ jest rozkładem dwumianowym?
Swoją odpowiedź uzasadnij.
2. (2 pkt) Znajdź $\mathbb{P}(X_n < Y_n)$. W tym celu udowodnij, że $\mathbb{P}(X_n < Y_n) = \mathbb{P}(n - X_n < n + 1 - Y_n)$.
3. (1 pkt) Jaki rozkład ma zmienna losowa $X_n + Y_n$?
Swoją odpowiedź uzasadnij.
4. (2 pkt) Czy zmienne losowe $X_n + Y_n$ oraz $X_n - Y_n$ są niezależne?
Swoją odpowiedź uzasadnij.
5. (2 pkt) Oblicz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Corr}(X_n + Y_n, X_n - Y_n).$$

Zadanie 3. (8 punktów)

Ilość szkód N ma rozkład dany rekurencyjnie:

$$P(N = 0) = \frac{1}{27},$$
$$\frac{P(N = k)}{P(N = k - 1)} = \frac{2}{3} + \frac{4}{3 \cdot k}, \quad k = 2, 3, \dots$$

1. Wylicz wartość oczekiwaną zmiennej N .
2. Wylicz wariancję zmiennej N .
3. Podaj wzór na rozkład zmiennej N .
4. Podaj ogólny wzór rekurencyjny Panjera dla zmiennych losowych o wartościach naturalnych.

Zadanie 4. (8 punktów)

Rozważ świat Blacka-Scholesa. Dane są: $S_0 = 100$, $K = 100$, $T = 0.5$, gdzie $(S_t), t \geq 0$ oznacza proces ceny aktywa bazowego. Przyjmij brak arbitrażu, ciągłą nominalną stopę procentową r oraz że nie są wypłacane dywidendy.

Podane są ceny trzech opcji binarnych o tym samym terminie wygaśnięcia T i cenie wykonania K :

Opcja call *cash-or-nothing* (C^{bin}), wypłacająca 1 gdy $S_T > K$: $C^{bin} = 0,48$,

Opcja put *cash-or-nothing* (P^{bin}), wypłacająca 1 gdy $S_T \leq K$: $P^{bin} = 0,48$,

Opcja call *asset-or-nothing* (C^{asset}), wypłacająca S_T gdy $S_T > K$: $C^{asset} = 61,25$.

Polecenia:

1. (2 pkt) Wyznacz stopę wolną od ryzyka r .
2. (6 pkt) Oblicz cenę europejskiej opcji waniliowej put dla tych samych parametrów S_0, K, T .