W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

1. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1-2x}{\ln(1+15x^2)}= \dots\dots\dots\dots$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1-3x}{\ln(1+15x^2)}= \dots\dots\dots\dots$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1-5x}{\ln(1+15x^2)}= \dots\dots\dots\dots$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{6x}-1-6x}{\ln(1+15x^2)}= \dots\dots\dots\dots$

2. Podaj sumę szeregu w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{25}-\sqrt[n+2]{25}\right)= \dots\dots\dots$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{16}-\sqrt[n+2]{16}\right)= \dots\dots\dots$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{9}-\sqrt[n+2]{9}\right)= \dots\dots\dots$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{4}-\sqrt[n+2]{4}\right)= \dots\dots\dots$

3. Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_{0}^{1}\dfrac{x^{79}\,dx}{x^{80}+1}= \dots\dots\dots\dots\dots\dots$ b) $\int\limits_{0}^{1}\dfrac{x^{39}\,dx}{x^{80}+1}= \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

c) $\int\limits_{0}^{1}\dfrac{x^{159}\,dx}{x^{160}+1}= \dots\dots\dots\dots\dots\dots$ d) $\int\limits_{0}^{1}\dfrac{x^{79}\,dx}{x^{160}+1}= \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

4. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{21n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3kn}}= \dots\dots\dots$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{5n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3kn}}= \dots\dots\dots$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{8n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3kn}}= \dots\dots\dots$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{16n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3kn}}= \dots\dots\dots$

5. Podaj w możliwe prostej postaci takie wyrażenia A, B, C, D, aby dla każdej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

a) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{|x|+x}^{1+x} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_{A}^{B}\int\limits_{C}^{D} f(x,y)\,dx\,dy$

$A=\ldots\ldots\ldots$ $B=\ldots\ldots\ldots$ $C=\ldots\ldots\ldots$ $D=\ldots\ldots\ldots$

b) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{|x|-x}^{1-x} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_{A}^{B}\int\limits_{C}^{D} f(x,y)\,dx\,dy$

$A=\ldots\ldots\ldots$ $B=\ldots\ldots\ldots$ $C=\ldots\ldots\ldots$ $D=\ldots\ldots\ldots$

c) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{x-1}^{x-|x|} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_{A}^{B}\int\limits_{C}^{D} f(x,y)\,dx\,dy$

$A=\ldots\ldots\ldots$ $B=\ldots\ldots\ldots$ $C=\ldots\ldots\ldots$ $D=\ldots\ldots\ldots$

d) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-x-1}^{-x-|x|} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_{A}^{B}\int\limits_{C}^{D} f(x,y)\,dx\,dy$

$A=\ldots\ldots\ldots$ $B=\ldots\ldots\ldots$ $C=\ldots\ldots\ldots$ $D=\ldots\ldots\ldots$

6. Podaj w uproszczonej postaci taką liczbę rzeczywistą dodatnią a, aby liczba zespolona z podanej postaci spełniała równanie $z^2\cdot\overline{z}^2=81$.

a) $z=\dfrac{5}{2}+ai,\quad a=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ b) $z=\dfrac{1}{2}+ai,\quad a=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

c) $z=2+ai,\quad a=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ d) $z=1+ai,\quad a=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

7. Dla podanej liczby λ podaj taką liczbę a, aby λ była wartością własną macierzy $\begin{pmatrix} 4 & a \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

a) $\lambda = 3$, $a = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ b) $\lambda = 6$, $a = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

c) $\lambda = 7$, $a = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ d) $\lambda = 8$, $a = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

8. Dla podanych liczb a i b wskaż takie liczby c, d i e, aby wektory $(0, 1, 2, 4, 8)$, $(1, 1, 1, 1, 1)$ i (a, b, c, d, e) były liniowo zależne.

a) $a = 1$, $b = 4$, $c = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $d = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $e = \ldots\ldots\ldots\ldots$

b) $a = 1$, $b = 5$, $c = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $d = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $e = \ldots\ldots\ldots\ldots$

c) $a = 1$, $b = 3$, $c = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $d = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $e = \ldots\ldots\ldots\ldots$

d) $a = 2$, $b = 12$, $c = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $d = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $e = \ldots\ldots\ldots\ldots$

9. Niech $C(k)$ będzie liczbą ideałów w pierścieniu $\mathbb{Z}$ zawierających liczbę 12^k. Wówczas

a) $C(3) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ b) $C(2) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

c) $C(5) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ d) $C(4) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

10. Dla podanej liczby r podaj liczbę elementów rzędu r w grupie izometrii 15-kąta foremnego.

a) $r=2$, ... b) $r=3$, ...

c) $r=5$, ... d) $r=15$, ...

11. Rzucamy ośmiościenną kostką do gry (mającą na ścianach kolejne liczby oczek od 1 do 8). Jeżeli wypadło mniej niż n oczek, unieważniamy pierwszy rzut i rzucamy po raz drugi – w tym wypadku wynik drugiego rzutu jest ostateczny. Niech $E(n)$ będzie wartością oczekiwaną liczby oczek, jaka widnieje na kostce po zakończeniu opisanej wyżej procedury. Podaj w postaci liczby naturalnej lub ułamka nieskracalnego:

a) $E(6)=$ .... b) $E(5)=$ ....

c) $E(4)=$ .... d) $E(3)=$ ....

12. Zdarzenia losowe A i B są niezależne. Dla podanego prawdopodobieństwa $P(A\cap B)$ podaj najmniejszą możliwą wartość $P(A\cup B)$.

a) $P(A\cap B)=1/9$, $\min P(A\cup B)=$ ....

b) $P(A\cap B)=1/4$, $\min P(A\cup B)=$ ....

c) $P(A\cap B)=1/16$, $\min P(A\cup B)=$ ....

d) $P(A\cap B)=4/9$, $\min P(A\cup B)=$ ....