W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

1. Niech $f_n(x)=\sqrt[n]{x}$. Podaj wartość pochodnej drugiego rzędu.

a) $f''_6(1)=$ ....

b) $f''_7(1)=$ ....

c) $f''_8(1)=$ ....

d) $f''_9(1)=$ ....

2. Niech $f(x)=x^{10}\cdot\ln\left(1+x^5\right)$. Podaj wartość pochodnej danego rzędu.

a) $f^{(45)}(0)=$ ....

b) $f^{(40)}(0)=$ ....

c) $f^{(35)}(0)=$ ....

d) $f^{(30)}(0)=$ ....

3. Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{21}\,dx}{x^{44}+1}=$ ....

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{14}\,dx}{x^{30}+1}=$ ....

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{49}\,dx}{x^{100}+1}=$ ....

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{30}\,dx}{x^{62}+1}=$ ....

4. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+8kn}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{3n}\frac{1}{\sqrt{n^2+8kn}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{6n}\frac{1}{\sqrt{n^2+8kn}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{10n}\frac{1}{\sqrt{n^2+8kn}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

5. Podaj w możliwie prostej postaci takie wyrażenia A, B, C, D, aby dla każdej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

a) $$\int\limits_{0}^{3}\int\limits_{x\sqrt{3}}^{\sqrt{12x-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx = \int\limits_{A}^{B}\int\limits_{C}^{D} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A = \ldots\ldots\ldots$ $B = \ldots\ldots\ldots$ $C = \ldots\ldots\ldots$ $D = \ldots\ldots\ldots$

b) $$\int\limits_{0}^{6}\int\limits_{x}^{\sqrt{12x-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx = \int\limits_{A}^{B}\int\limits_{C}^{D} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A = \ldots\ldots\ldots$ $B = \ldots\ldots\ldots$ $C = \ldots\ldots\ldots$ $D = \ldots\ldots\ldots$

c) $$\int\limits_{6}^{12}\int\limits_{0}^{\sqrt{12x-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx = \int\limits_{A}^{B}\int\limits_{C}^{D} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A = \ldots\ldots\ldots$ $B = \ldots\ldots\ldots$ $C = \ldots\ldots\ldots$ $D = \ldots\ldots\ldots$

d) $$\int\limits_{0}^{12}\int\limits_{0}^{\sqrt{12x-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx = \int\limits_{A}^{B}\int\limits_{C}^{D} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A = \ldots\ldots\ldots$ $B = \ldots\ldots\ldots$ $C = \ldots\ldots\ldots$ $D = \ldots\ldots\ldots$

6. Niech $z=(1+i)\cdot\left(\sqrt{3}-i\right)$. Zapisz w postaci kartezjańskiej:

a) $z^{27}=$ .... b) $z^{30}=$ ....

c) $z^{36}=$ .... d) $z^{42}=$ ....

7. Dla podanej liczby λ podaj taką liczbę a, aby λ była wartością własną macierzy $\begin{pmatrix} 4 & a \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

a) $\lambda=9$, $a=$ .... b) $\lambda=7$, $a=$ ....

c) $\lambda=5$, $a=$ .... d) $\lambda=3$, $a=$ ....

8. Niech $A=(0,0,0)$, $B=(1,2,0)$ i $C=(3,1,0)$. Dla danego punktu D podaj objętość czworościanu $ABCD$.

a) $D=(2,3,4)$, $V_{ABCD}=$ .... b) $D=(1,2,3)$, $V_{ABCD}=$ ....

c) $D=(4,5,6)$, $V_{ABCD}=$ .... d) $D=(3,4,5)$, $V_{ABCD}=$ ....

9. Niech $C(k)$ będzie liczbą ideałów w pierścieniu $\mathbb{Z}$ zawierających liczby 6^4 i 12^k. Wówczas

a) $C(5)=$ .... b) $C(2)=$ ....

c) $C(3)=$ .... d) $C(4)=$ ....

10. Dla podanej liczby n podaj największą taką liczbę naturalną k, że w grupie permutacji **parzystych** A_n istnieje element rzędu k.

a) $n=4$, $k=$ .... b) $n=5$, $k=$ ....

c) $n=6$, $k=$ .... d) $n=7$, $k=$ ....

11. W urnie znajduje się $3n$ kul, po n z każdego z trzech kolorów: amarantowego, białego i czarnego. Losujemy z urny dwie kule (losowanie bez zwracania). Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że jedna z wylosowanych kul jest biała, a druga czarna. Podaj w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(4)=$ .... b) $P(3)=$ ....

c) $P(2)=$ .... d) $P(1)=$ ....

12. Zdarzenia losowe A, B i C są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A\cap B)$, $P(A\cap C)$ i $P(B\cap C)$ podaj $P(A\cup B\cup C)$, o ile istnieją niezależne zdarzenia A, B i C spełniające podane warunki. Wpisz **NIE**, jeśli takie zdarzenia nie istnieją.

a) $P(A\cap B)=1/5$, $P(A\cap C)=1/5$, $P(B\cap C)=1/9$,
$P(A\cup B\cup C)=$ ....

b) $P(A\cap B)=1/5$, $P(A\cap C)=1/5$, $P(B\cap C)=1/4$,
$P(A\cup B\cup C)=$ ....

c) $P(A\cap B)=1/5$, $P(A\cap C)=1/5$, $P(B\cap C)=1/36$,
$P(A\cup B\cup C)=$ ....

d) $P(A\cap B)=1/5$, $P(A\cap C)=1/5$, $P(B\cap C)=1/25$,
$P(A\cup B\cup C)=$ ....