

**Zadanie 1.** Wyznacz przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n+9)^n \cdot x^n}{(6n+11)^n}.$$

Jeśli nie potrafisz, to przynajmniej wyznacz promień zbieżności (za **8 punktów**).

**Zadanie 2.** Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną  $k$ , dla której

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y^k}{x^{10} + y^{44}} = 0.$$

**Zadanie 3.** Rozwiąż zagadnienie początkowe

$$x'(t) = x(t) - 1, \quad x(0) = 0.$$

**Zadanie 4.** Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową wielomianów stopnia nie większego od 4 o współczynnikach rzeczywistych. Definiujemy przekształcenie liniowe  $f: V \rightarrow V$  wzorem

$$f(W(x)) = x \cdot W'(x).$$

Udowodnij, że zbiór wszystkich przekształceń liniowych  $g: V \rightarrow V$  spełniających warunek  $f = g \circ g$  ma więcej niż 10 elementów.

*Uwaga:* Symbol "o" oznacza złożenie przekształceń:  $f(v) = g(g(v))$  dla każdego  $v \in V$ .

**Zadanie 5.** Rozstrzygnij, czy grupa permutacji  $S_n$  zawiera podgrupę izomorficzną z  $\mathbb{Z}_{10}$ , jeżeli:

a) (8 punktów)  $n = 7$ ,

b) (12 punktów)  $n = 6$ .

**Zadanie 6.** W obiegu pieniężnym Dakistanu znajduje się  $2^{26}$  monet prawdziwych (z orłem po jednej stronie i reszką po drugiej) oraz jedna moneta fałszywa (z orłami po obu stronach).

Otrzymaliśmy w prezencie monetę przywiezioną z Dakistanu i wykonaliśmy nią 20 rzutów. Okazało się, że wypadły same orły.

Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia samych orłów, gdy rzucimy tą monetą kolejne 4 razy?