EGZAMIN LICENCJACKI (zadania otwarte)
14 lutego 2025 r.

Zadanie **1.** Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej $x \in (16, 81)$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[4]{x} > \frac{x+114}{65}\,.$$

Zadanie **2.** Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x,y) = 4x + 2y + |x - 2y|$$

na okręgu

$$\Big\{(x,y):\, x^2 + y^2 = 1\Big\}\,.$$

Wyznacz wszystkie punkty, w których wartości najmniejsza i największa są osiągane.

Zadanie **3.** Rozwiąż zagadnienie początkowe

$$x'(t) = x(t)\cdot\Big(1 - x(t)\Big)\,, \qquad x(0) = 1/2\,.$$

Zadanie **4.**

a) (10 punktów) Podaj przykład przekształcenia liniowego $f:\mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$, dla którego nie istnieje przekształcenie liniowe $g:\mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ spełniające warunek $f = g\circ g$. Uzasadnij poprawność podanego przykładu.

b) (10 punktów) Niech $f, g:\mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ będą takimi przekształceniami liniowymi, że $f = g\circ g$. Udowodnij, że jeżeli obraz przekształcenia f ma wymiar 6, to obraz przekształcenia g również ma wymiar 6.

Uwaga: Symbol "$\circ$" oznacza złożenie przekształceń: $f(v) = g(g(v))$ dla każdego $v \in \mathbb{R}^7$.

Zadanie **5.** Podaj przykład ciała skończonego oraz takiego jego elementu $x \neq 1$, że $x^5 = 1$. Uzasadnij poprawność podanego przykładu.

Jeśli nie potafisz podać przykładu ciała skończonego, to podaj (również z uzasadnieniem poprawności) przykład z ciałem nieskończonym – w takim przypadku możesz otrzymać maksymalnie **8 punktów.**

Zadanie **6.** Dane są dwie urny. W jednej urnie jest 200 kul czarnych. W drugiej urnie jest 99 kul czarnych i jedna biała. Wybieramy losowo jedną urnę, a następnie kolejno losujemy z niej kule (bez zwracania). Okazało się, że pierwszych 50 wylosowanych kul to kule czarne. Jakie jest prawdopodobieństwo, że 51-sza wylosowana kula będzie biała?