W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

1. Niech $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$. Podaj wartość pochodnej drugiego rzędu.

a) $f_6''(1) = \mathbf{-5/36}$

b) $f_7''(1) = \mathbf{-6/49}$

c) $f_8''(1) = \mathbf{-7/64}$

d) $f_9''(1) = \mathbf{-8/81}$

2. Niech $f(x) = x^{10} \cdot \ln\left(1 + x^5\right)$. Podaj wartość pochodnej danego rzędu.

a) $f^{(45)}(0) = \mathbf{45!/7}$

b) $f^{(40)}(0) = \mathbf{-40!/6}$

c) $f^{(35)}(0) = \mathbf{35!/5}$

d) $f^{(30)}(0) = \mathbf{-30!/4}$

3. Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{21}\,dx}{x^{44}+1} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{88}}$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{14}\,dx}{x^{30}+1} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{60}}$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{49}\,dx}{x^{100}+1} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{200}}$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{30}\,dx}{x^{62}+1} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{124}}$

4. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+8kn}}=\mathbf{1/2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{3n}\frac{1}{\sqrt{n^2+8kn}}=\mathbf{1}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{6n}\frac{1}{\sqrt{n^2+8kn}}=\mathbf{3/2}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{10n}\frac{1}{\sqrt{n^2+8kn}}=\mathbf{2}$

5. Podaj w możliwie prostej postaci takie wyrażenia A, B, C, D, aby dla każdej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

a) $$\int\limits_{0}^{3}\int\limits_{x\sqrt{3}}^{\sqrt{12x-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_{A}^{B}\int\limits_{C}^{D} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\boldsymbol{\pi/3}$ $B=\boldsymbol{\pi/2}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\mathbf{12\cos}\boldsymbol{\varphi}$

b) $$\int\limits_{0}^{6}\int\limits_{x}^{\sqrt{12x-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_{A}^{B}\int\limits_{C}^{D} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\boldsymbol{\pi/4}$ $B=\boldsymbol{\pi/2}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\mathbf{12\cos}\boldsymbol{\varphi}$

c) $$\int\limits_{6}^{12}\int\limits_{0}^{\sqrt{12x-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_{A}^{B}\int\limits_{C}^{D} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\mathbf{0}$ $B=\boldsymbol{\pi/4}$ $C=\mathbf{6/\cos}\boldsymbol{\varphi}$ $D=\mathbf{12\cos}\boldsymbol{\varphi}$

d) $$\int\limits_{0}^{12}\int\limits_{0}^{\sqrt{12x-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_{A}^{B}\int\limits_{C}^{D} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\mathbf{0}$ $B=\boldsymbol{\pi/2}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\mathbf{12\cos}\boldsymbol{\varphi}$

6. Niech $z=(1+i)\cdot\left(\sqrt{3}-i\right)$. Zapisz w postaci kartezjańskiej:

a) $z^{27}=\mathbf{2^{40}+2^{40}\cdot i}$

b) $z^{30}=\mathbf{2^{45}\cdot i}$

c) $z^{36}=\mathbf{-2^{54}}$

d) $z^{42}=\mathbf{-2^{63}\cdot i}$

7. Dla podanej liczby λ podaj taką liczbę a, aby λ była wartością własną macierzy $\begin{pmatrix} 4 & a \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

a) $\lambda=9,\ \ a=\mathbf{25}$

b) $\lambda=7,\ \ a=\mathbf{9}$

c) $\lambda=5,\ \ a=\mathbf{1}$

d) $\lambda=3,\ \ a=\mathbf{1}$

8. Niech $A=(0,0,0)$, $B=(1,2,0)$ i $C=(3,1,0)$. Dla danego punktu D podaj objętość czworościanu $ABCD$.

a) $D=(2,3,4),\quad V_{ABCD}=\mathbf{10/3}$

b) $D=(1,2,3),\quad V_{ABCD}=\mathbf{5/2}$

c) $D=(4,5,6),\quad V_{ABCD}=\mathbf{5}$

d) $D=(3,4,5),\quad V_{ABCD}=\mathbf{25/6}$

9. Niech $C(k)$ będzie liczbą ideałów w pierścieniu $\mathbb{Z}$ zawierających liczby 6^4 i 12^k. Wówczas

a) $C(5)=\mathbf{25}$

b) $C(2)=\mathbf{15}$

c) $C(3)=\mathbf{20}$

d) $C(4)=\mathbf{25}$

10. Dla podanej liczby n podaj największą taką liczbę naturalną k, że w grupie permutacji **parzystych** A_n istnieje element rzędu k.

a) $n=4$, $k=\mathbf{3}$ b) $n=5$, $k=\mathbf{5}$

c) $n=6$, $k=\mathbf{5}$ d) $n=7$, $k=\mathbf{7}$

11. W urnie znajduje się $3n$ kul, po n z każdego z trzech kolorów: amarantowego, białego i czarnego. Losujemy z urny dwie kule (losowanie bez zwracania). Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że jedna z wylosowanych kul jest biała, a druga czarna. Podaj w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(4)=\mathbf{8/33}$ b) $P(3)=\mathbf{1/4}$

c) $P(2)=\mathbf{4/15}$ d) $P(1)=\mathbf{1/3}$

12. Zdarzenia losowe A, B i C są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A\cap B)$, $P(A\cap C)$ i $P(B\cap C)$ podaj $P(A\cup B\cup C)$, o ile istnieją niezależne zdarzenia A, B i C spełniające podane warunki. Wpisz **NIE**, jeśli takie zdarzenia nie istnieją.

a) $P(A\cap B)=1/5$, $P(A\cap C)=1/5$, $P(B\cap C)=1/9$,
$P(A\cup B\cup C)=\mathbf{37/45}$

b) $P(A\cap B)=1/5$, $P(A\cap C)=1/5$, $P(B\cap C)=1/4$,
$P(A\cup B\cup C)=\mathbf{17/20}$

c) $P(A\cap B)=1/5$, $P(A\cap C)=1/5$, $P(B\cap C)=1/36$,
$P(A\cup B\cup C)=$ **NIE**

d) $P(A\cap B)=1/5$, $P(A\cap C)=1/5$, $P(B\cap C)=1/25$,
$P(A\cup B\cup C)=\mathbf{1}$

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

1. Niech $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$. Podaj wartość pochodnej drugiego rzędu.

a) $f_8''(1) = \boldsymbol{-7/64}$

b) $f_7''(1) = \boldsymbol{-6/49}$

c) $f_6''(1) = \boldsymbol{-5/36}$

d) $f_9''(1) = \boldsymbol{-8/81}$

2. Niech $f(x) = x^{10} \cdot \ln\left(1 + x^5\right)$. Podaj wartość pochodnej danego rzędu.

a) $f^{(30)}(0) = \boldsymbol{-30!/4}$

b) $f^{(35)}(0) = \boldsymbol{35!/5}$

c) $f^{(45)}(0) = \boldsymbol{45!/7}$

d) $f^{(40)}(0) = \boldsymbol{-40!/6}$

3. Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_0^1 \frac{x^{49}\,dx}{x^{100}+1} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{200}}$

b) $\int\limits_0^1 \frac{x^{21}\,dx}{x^{44}+1} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{88}}$

c) $\int\limits_0^1 \frac{x^{14}\,dx}{x^{30}+1} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{60}}$

d) $\int\limits_0^1 \frac{x^{30}\,dx}{x^{62}+1} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{124}}$

4. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{6n}\frac{1}{\sqrt{n^2+8kn}}=\mathbf{3/2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{3n}\frac{1}{\sqrt{n^2+8kn}}=\mathbf{1}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+8kn}}=\mathbf{1/2}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{10n}\frac{1}{\sqrt{n^2+8kn}}=\mathbf{2}$

5. Podaj w możliwie prostej postaci takie wyrażenia A, B, C, D, aby dla każdej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

a) $$\int\limits_0^{12}\int\limits_0^{\sqrt{12x-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_A^B\int\limits_C^D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\mathbf{0}$ $B=\boldsymbol{\pi/2}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\mathbf{12\cos\boldsymbol{\varphi}}$

b) $$\int\limits_6^{12}\int\limits_0^{\sqrt{12x-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_A^B\int\limits_C^D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\mathbf{0}$ $B=\boldsymbol{\pi/4}$ $C=\mathbf{6/\cos\boldsymbol{\varphi}}$ $D=\mathbf{12\cos\boldsymbol{\varphi}}$

c) $$\int\limits_0^{3}\int\limits_{x\sqrt{3}}^{\sqrt{12x-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_A^B\int\limits_C^D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\boldsymbol{\pi/3}$ $B=\boldsymbol{\pi/2}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\mathbf{12\cos\boldsymbol{\varphi}}$

d) $$\int\limits_0^{6}\int\limits_{x}^{\sqrt{12x-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_A^B\int\limits_C^D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\boldsymbol{\pi/4}$ $B=\boldsymbol{\pi/2}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\mathbf{12\cos\boldsymbol{\varphi}}$

6. Niech $z=(1+i)\cdot\left(\sqrt{3}-i\right)$. Zapisz w postaci kartezjańskiej:

a) $z^{36}=\mathbf{-2^{54}}$

b) $z^{30}=\mathbf{2^{45}\cdot i}$

c) $z^{27}=\mathbf{2^{40}+2^{40}\cdot i}$

d) $z^{42}=\mathbf{-2^{63}\cdot i}$

7. Dla podanej liczby λ podaj taką liczbę a, aby λ była wartością własną macierzy $\begin{pmatrix} 4 & a \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

a) $\lambda=3,\ \ a=\mathbf{1}$

b) $\lambda=5,\ \ a=\mathbf{1}$

c) $\lambda=9,\ \ a=\mathbf{25}$

d) $\lambda=7,\ \ a=\mathbf{9}$

8. Niech $A=(0,0,0)$, $B=(1,2,0)$ i $C=(3,1,0)$. Dla danego punktu D podaj objętość czworościanu $ABCD$.

a) $D=(4,5,6),\quad V_{ABCD}=\mathbf{5}$

b) $D=(2,3,4),\quad V_{ABCD}=\mathbf{10/3}$

c) $D=(1,2,3),\quad V_{ABCD}=\mathbf{5/2}$

d) $D=(3,4,5),\quad V_{ABCD}=\mathbf{25/6}$

9. Niech $C(k)$ będzie liczbą ideałów w pierścieniu $\mathbb{Z}$ zawierających liczby 6^4 i 12^k. Wówczas

a) $C(5)=\mathbf{25}$

b) $C(4)=\mathbf{25}$

c) $C(3)=\mathbf{20}$

d) $C(2)=\mathbf{15}$

10. Dla podanej liczby n podaj największą taką liczbę naturalną k, że w grupie permutacji **parzystych** A_n istnieje element rzędu k.

a) $n=6$, $k=\mathbf{5}$

b) $n=5$, $k=\mathbf{5}$

c) $n=4$, $k=\mathbf{3}$

d) $n=7$, $k=\mathbf{7}$

11. W urnie znajduje się $3n$ kul, po n z każdego z trzech kolorów: amarantowego, białego i czarnego. Losujemy z urny dwie kule (losowanie bez zwracania). Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że jedna z wylosowanych kul jest biała, a druga czarna. Podaj w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(1)=\mathbf{1/3}$

b) $P(2)=\mathbf{4/15}$

c) $P(4)=\mathbf{8/33}$

d) $P(3)=\mathbf{1/4}$

12. Zdarzenia losowe A, B i C są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A\cap B)$, $P(A\cap C)$ i $P(B\cap C)$ podaj $P(A\cup B\cup C)$, o ile istnieją niezależne zdarzenia A, B i C spełniające podane warunki. Wpisz **NIE**, jeśli takie zdarzenia nie istnieją.

a) $P(A\cap B)=1/5$, $P(A\cap C)=1/5$, $P(B\cap C)=1/36$,
$P(A\cup B\cup C)=$ **NIE**

b) $P(A\cap B)=1/5$, $P(A\cap C)=1/5$, $P(B\cap C)=1/9$,
$P(A\cup B\cup C)=\mathbf{37/45}$

c) $P(A\cap B)=1/5$, $P(A\cap C)=1/5$, $P(B\cap C)=1/4$,
$P(A\cup B\cup C)=\mathbf{17/20}$

d) $P(A\cap B)=1/5$, $P(A\cap C)=1/5$, $P(B\cap C)=1/25$,
$P(A\cup B\cup C)=\mathbf{1}$