EGZAMIN MAGISTERSKI, 14.02.2025 r.
Matematyka w ekonomii

Zadanie **1. (8 punktów)**

Rozpatrzmy funkcję produkcji typu Cobba-Douglasa następującej postaci

$$Y = \beta_0 \, x_1^{\beta_1} \, x_2^{\beta_2} \, \ldots \, x_k^{\beta_k} \exp(W),$$

gdzie:

Y – wielkość produkcji,
$x_1, \, x_2, \ldots x_k$ – nielosowe nakłady czynników produkcji,
$\beta_1, \, \beta_2, \ldots, \beta_k$ – nielosowe parametry,
W – błąd losowy o rozkładzie normalnym $N(0, \sigma^2)$.

Wyznacz dystrybuantę oraz gęstość rozkładu wielkości produkcji Y.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Niech $X_1, \ldots, X_m$ będzie próbą z rozkładu $N(\mu_1, \sigma^2)$. Niech $Y_1, \ldots, Y_n$ będzie próbą z rozkładu $N(\mu_2, \sigma^2)$. Zakładamy, że obie próby są niezależne, a wariancja σ^2 nieznana. Testujemy $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ przeciwko globalnym alternatywom. Statystyka testowa

$$T = \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{1}{m+n-2} \left[\sum_{i=1}^{m} (X_i - \overline{X})^2 + \sum_{j=1}^{n} (Y_j - \overline{Y})^2 \right]}}$$

odrzuca H_0 dla dużych wartości $|T|$. Jaki jest rozkład statystyki T przy hipotezie zerowej? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Proces stochastyczny $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ jest szeregiem czasowym ARMA(p, q).

(i) Czy proces zróżnicowany $\{\Delta X_t : t \in \mathbb{Z}\} = \{X_t - X_{t-1} : t \in \mathbb{Z}\}$ jest szeregiem czasowym ARMA?

(ii) Czy proces $\{\Delta X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ jest odwracalny?

Uzasadnij swoje odpowiedzi na powyższe pytania.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Zmienna losowa X ma rozkład zadany przez

$$\mathbb{P}(X > x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ ae^{-\lambda x} & x \geq 0. \end{cases}$$

gdzie $0 < a < 1$.

(a) Ile wynosi $\mathbb{P}(X = 0)$? Opisz jaki rozkład ma zmienna losowa X.

(b) Obliczyć

$$\mathbb{E}(X).$$

(c) Obliczyć

$$\mathbb{E}(X - c)_+,$$

gdy

$$a = \frac{1}{2}, \quad \lambda = 2, \quad c = \frac{\ln 2}{2}.$$

EGZAMIN MAGISTERSKI, 14.02.2025 r.
Matematyka teoretyczna

Zadanie **1. (8 punktów)**
Niech $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie dane wzorem
$$p(x,y) = x.$$

- Udowodnij, że p jest funkcją ciągłą.
- Czy obraz $p[U]$, gdy U jest zbiorem otwartym, musi być otwarty? Odpowiedź uzasadnij.
- Podaj przykład domkniętego zbioru $D \subseteq \mathbb{R}^2$ takiego, że jego obraz $p[D]$ nie jest domknięty.
- Pokaż, że jeżeli $D \subseteq \mathbb{R}^2$ jest domknięty i ograniczony, to jego obraz $p[D]$ jest domknięty.

Uwaga. Zarówno na $\mathbb{R}$ jak i $\mathbb{R}^2$ rozważamy metryki euklidesowe.

Zadanie **2. (8 punktów)**
Niech X będzie zbiorem, a $\mathcal{P}(X)$ — rodziną wszystkich podzbiorów X. Na $\mathcal{P}(X)$ rozważmy działania $U+V := (U\setminus V)\cup(V\setminus U)$ oraz $U\cdot V := U\cap V$. Wiadomo, że $(\mathcal{P}(X),+,\cdot)$ jest pierścieniem.

(a) (1pkt) Dla $U \subseteq X$ opisać, z jakich zbiorów składa się ideał główny (U) generowany przez U.

(b) (5pkt) Udowodnić, że $(\mathcal{P}(X),+,\cdot)$ jest pierścieniem ideałów głównych wtedy i tylko wtedy, gdy X jest skończony.

(c) (2pkt) Udowodnić, że dla każdego $x \in X$ zbiór $I_x := \{Y \in \mathcal{P}(X) : x \notin Y\}$ jest ideałem maksymalnym pierścienia $(\mathcal{P}(X),+,\cdot)$.

Zadanie **3. (8 punktów)**
Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i X_n ma rozkład jednostajny na $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$.

a) Pokaż, że

$$M_n = \sum_{j=1}^{n} X_j X_{j+1}$$

jest martyngałem względem filtracji $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1})$.

b) Pokaż, że

$$\sup_n [M_n^2] < \infty$$

i wywnioskuj, że martyngał M_n jest zbieżny w L^2.

c) Czy stąd wynika, że martyngał M_n jest zbieżny p.w.?

Zadanie **4. (8 punktów)**

Znajdź $b > 0$ oraz domknięty podzbiór przestrzeni $C([0,b])$, na którym operator F zadany wzorem

$$F(u)(x) = \sin x + \int_0^x u^3(y)\,\mathrm{d}y$$

jest kontrakcją.

Uzasadnij, że równanie całkowe

$$u(x) = \sin x + \int_0^x u^3(y)\,\mathrm{d}y$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie w przestrzeni $C([0,b])$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 14.02.2025 r.
Analiza danych

Zadanie 1. (8 punktów)

1. Rozważmy następujący ukryty model Markowa (HMM):

   - **Stany ukryte:** $\mathcal{S} = \{1, 2\}$.
   - **Macierz przejść:**
   $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$
   - **Zbiór obserwacji:** $\mathcal{V} = \{A, B\}$.
   - **Prawdopodobieństwa emisji:** Dla każdego stanu $s \in \mathcal{S}$ mamy
   $$\begin{aligned} P(o_t = A \mid q_t = 1) &= p, \quad P(o_t = B \mid q_t = 1) = 1 - p, \\ P(o_t = A \mid q_t = 2) &= \tfrac{1}{2}, \quad P(o_t = B \mid q_t = 2) = \tfrac{1}{2}, \end{aligned}$$
   gdzie $p \in (0, 1)$.
   - **Rozkład początkowy:**
   $$P(X_1 = 1) = \tfrac{1}{4}, \quad P(X_1 = 2) = \tfrac{3}{4}.$$
   - **Obserwacja:** Zaobserwowano ciąg $O = o_1 o_2 = AB$.
   - **Cel:** Niech $Q^* = q_1^* q_2^*$ oznacza najbardziej prawdopodobny ciąg stanów ukrytych, tj.
   $$Q^* = \arg \max_{Q = q_1 q_2} P(Q \mid O, \lambda).$$
   Korzystając z **algorytmu Viterbiego**, wyznacz, dla jakich wartości parametru p najbardziej prawdopodobnym stanem w chwili $t = 2$ jest stan 1.

   Innymi słowy, wyznacz wartości parametru p dla których
   $$q_2^* = 1.$$

Zadanie 2. (8 punktów)

Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym $U(-1,1)$. Niech $Y = X^2$. Czy zmienne losowe X i Y są
a) niezależne?
b) nieskorelowane?
Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie **3. (8 punktów)**
Niech $X_1, \ldots, X_m$ będzie próbą z rozkładu $N(\mu_1, \sigma^2)$. Niech $Y_1, \ldots, Y_n$ będzie próbą z rozkładu $N(\mu_2, \sigma^2)$. Zakładamy, że obie próby są niezależne, a wariancja σ^2 nieznana. Testujemy $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ przeciwko globalnym alternatywom. Statystyka testowa

$$T = \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{1}{m+n-2}\left[\sum_{i=1}^{m}(X_i - \overline{X})^2 + \sum_{j=1}^{n}(Y_j - \overline{Y})^2\right]}}$$

odrzuca H_0 dla dużych wartości $|T|$. Jaki jest rozkład statystyki T przy hipotezie zerowej? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie **4. (8 punktów)**
Zmienna losowa X ma rozkład zadany przez

$$\mathbb{P}(X > x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ ae^{-\lambda x} & x \geq 0. \end{cases}$$

gdzie $0 < a < 1$.
(a) Ile wynosi $\mathbb{P}(X = 0)$? Opisz jaki rozkład ma zmienna losowa X.
(b) Obliczyć

$$\mathbb{E}(X).$$

(c) Obliczyć

$$\mathbb{E}(X - c)_+,$$

gdy

$$a = \frac{1}{2}, \quad \lambda = 2, \quad c = \frac{\ln 2}{2}.$$

EGZAMIN MAGISTERSKI, 14.02.2025 r.
Aktuarialno-finansowa

Zadanie **1. (8 punktów)**

Niech $\{B_1(t); t \geq 0\}$, $\{B_2(t); t \geq 0\}$ będą niezależnymi standardowymi ruchami Browna.
a) Wyznaczyć wszystkie $a > 0$, że proces

$$\left\{X(t) := aB_1(t) - B_2\left(\frac{8}{3}at\right); t \geq 0\right\}$$

jest standardowym ruchem Browna.
b) Znaleźć granicę

$$\lim_{n\to\infty} P\left(B_1(n) > \sqrt{n}B_2(2025)\right).$$

Odpowiedzi uzasadnić.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Zmienna losowa X ma rozkład zadany przez

$$\mathbb{P}(X > x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ ae^{-\lambda x} & x \geq 0. \end{cases}$$

gdzie $0 < a < 1$.
(a) Ile wynosi $\mathbb{P}(X = 0)$? Opisz jaki rozkład ma zmienna losowa X.
(b) Obliczyć

$$\mathbb{E}(X).$$

(c) Obliczyć

$$\mathbb{E}(X - c)_+,$$

gdy

$$a = \frac{1}{2}, \quad \lambda = 2, \quad c = \frac{\ln 2}{2}.$$

Zadanie **3. (8 punktów)**

Model ciągły. Niech $R(t) = u + ct - S(t),\ \ t > 0$ będzie procesem nadwyżki ubezpieczyciela gdzie:

$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ jest złożonym procesem Poissona z parametrem częstotliwości λ, tzn. $N(t)$ ma rozkład Poissona o wartości oczekiwanej λt,

Niech $\psi(u) = P(T < \infty)$ będzie prawdopodobieństwem ruiny, gdzie $T = \inf\{t : R(t) < 0\}$,

- zakładając, że wartość pojedynczej szkody X_i ma rozkład wykładniczy $Exp(1)$, oraz $\lambda = 1, \quad c = 3$ podaj wzór na $\psi(u)$, dla dowolnego $u \geq 0$,
- zakładając, że X_i mają dowolny rozkład oraz $\lambda = 1, \quad EX_i = 1, \quad c = 2$, podaj wartość $\psi(0)$,
- dla dowolnego rozkładu X_i, przy założeniu, że $q = \lambda EX_i/c < 1$ podaj wzór na $1 - \psi(u)$, dla dowolnego $u \geq 0$, używając rozkładu resztowego (wzór Pollaczka-Chinczyna)
- podaj definicję współczynnika dopasowania w modelu ciągłym i jego wartość, gdy szkody X_i mają rozkład wykładniczy.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Niech p_1, p_2, p_3 będą cenami trzech opcji europejskich PUT na to samo aktywo bazowe z cenami wykonania odpowiednio K_1, K_2 i K_3. Załóżmy, że opcje te mają taką samą zapadalność, a ich ceny wykonania spełniają $K_1 < K_2 < K_3$ oraz $K_2 - K_1 = K_3 - K_2$. Udowodnij, że aby nie było arbitrażu musi być spełniona zależność

$$p_2 \leq \frac{p_1 + p_3}{2}.$$