W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

**1.** Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_1^5 |x-45|+|x+55|\,dx =$ .......  b) $\int\limits_0^3 |x-45|+|x+55|\,dx =$ .......

c) $\int\limits_{-1}^6 |x-45|+|x+55|\,dx =$ .......  d) $\int\limits_2^4 |x-45|+|x+55|\,dx =$ .......

**2.** Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x)=x^{100}\cdot e^{x^{10}}\,.$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(900)}(0)=$ ....................  b) $f^{(800)}(0)=$ ....................

c) $f^{(700)}(0)=$ ....................  d) $f^{(600)}(0)=$ ....................

**3.** Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru $p$, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x^{3p}+x^{2p}}}{\sqrt{x^{38}+x^{22}}}\,dx,$ .............  b) $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x^{3p}+x^{2p}}}{\sqrt{x^{35}+x^{20}}}\,dx,$ .............

c) $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x^{3p}+x^{2p}}}{\sqrt{x^{44}+x^{26}}}\,dx,$ .............  d) $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x^{3p}+x^{2p}}}{\sqrt{x^{41}+x^{24}}}\,dx,$ .............

**4.** Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{3n}\dfrac{k}{k^2+3n^2}=\ldots\ldots\ldots\ldots$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2n+1}^{5n}\dfrac{k}{k^2+3n^2}=\ldots\ldots\ldots\ldots$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{6n}\dfrac{k}{k^2+3n^2}=\ldots\ldots\ldots\ldots$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{7n}\dfrac{k}{k^2+3n^2}=\ldots\ldots\ldots\ldots$

**5.** Podaj w możliwie prostej postaci takie wyrażenia $A$, $B$, $C$, $D$, aby dla każdej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

a) $$\int\limits_0^{\sqrt{3}}\int\limits_{x^2}^{\sqrt{3}\cdot x} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_A^B\int\limits_C^D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\ldots\ldots\ldots$ $B=\ldots\ldots\ldots$ $C=\ldots\ldots\ldots$ $D=\ldots\ldots\ldots$

b) $$\int\limits_0^{\sqrt{3}}\int\limits_0^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_A^B\int\limits_C^D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\ldots\ldots\ldots$ $B=\ldots\ldots\ldots$ $C=\ldots\ldots\ldots$ $D=\ldots\ldots\ldots$

c) $$\int\limits_0^{1}\int\limits_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_A^B\int\limits_C^D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\ldots\ldots\ldots$ $B=\ldots\ldots\ldots$ $C=\ldots\ldots\ldots$ $D=\ldots\ldots\ldots$

d) $$\int\limits_0^{1}\int\limits_0^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_A^B\int\limits_C^D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\ldots\ldots\ldots$ $B=\ldots\ldots\ldots$ $C=\ldots\ldots\ldots$ $D=\ldots\ldots\ldots$

**6.** Podaj taką liczbę rzeczywistą $a$, że liczba zespolona $z$ podanej postaci spełnia równanie $\arg z = 2\arg(2+i)$.

a) $z=1+ai$, $a=$ ...............

b) $z=a+i$, $a=$ ...............

c) $z=3+ai$, $a=$ ..............

d) $z=a+3i$, $a=$ ..............

**7.** Dla podanych liczb $a$ i $b$ wypisz w kolejności niemalejącej wartości własne (z uwzględnieniem krotności) macierzy $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & b \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

a) $a=6$, $b=6$, ...............

b) $a=6$, $b=2$, ...............

c) $a=2$, $b=6$, ...............

d) $a=2$, $b=2$, ...............

**8.** Niech $A=(0,0)$ i $B=(1,2)$. Dla danego punktu $C$ podaj pole trójkąta $ABC$.

a) $C=(3,4)$, $P_{ABC}=$ ..........

b) $C=(0,5)$, $P_{ABC}=$ ..........

c) $C=(5,0)$, $P_{ABC}=$ ..........

d) $C=(4,3)$, $P_{ABC}=$ ..........

**9.** Niech $C(k)$ będzie liczbą ideałów w pierścieniu $\mathbb{Z}$ zawierających liczbę $6^k$. Wówczas

a) $C(5) =$ ...................... b) $C(6) =$ ......................

c) $C(7) =$ ...................... d) $C(8) =$ ......................

**10.** Zbiorem elementów grupy jest zbiór liczb rzeczywistych, a działanie grupowe "$\circ$" jest określone wzorem $x \circ y = x + y + 16$. Dla podanego elementu $g$ tej grupy podaj element do niego odwrotny.

a) $g = 64,\quad g^{-1} =$ ............... b) $g = 8,\quad g^{-1} =$ ...............

c) $g = 4,\quad g^{-1} =$ ................ d) $g = 2,\quad g^{-1} =$ ................

**11.** W urnie znajduje się 9 kul z kolejnymi liczbami od 1 do 9. Losujemy z urny dwie kule (losowanie bez zwracania). Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że suma liczb napisanych na wylosowanych kulach jest równa $n$. Podaj w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(16) =$ ..................... b) $P(17) =$ .....................

c) $P(13) =$ ..................... d) $P(15) =$ .....................

**12.** Zdarzenia losowe $A$ i $B$ są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A)$ i $P(B)$ podaj $P(A \cup B)$.

a) $P(A) = P(B) = 1/6,\quad P(A \cup B) =$ ....................................

b) $P(A) = P(B) = 1/3,\quad P(A \cup B) =$ ....................................

c) $P(A) = P(B) = 1/4,\quad P(A \cup B) =$ ....................................

d) $P(A) = P(B) = 1/5,\quad P(A \cup B) =$ ....................................