

EGZAMIN LICENCJACKI (zadania otwarte)
10 września 2024 r.

Zadanie 1. Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \ln(9x^2 + 1).$$

Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq 3 \cdot |x - y|.$$

Zadanie 2. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2$$

na zbiorze

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 10z \wedge x^2 + y^2 = 9\}.$$

Wyznacz wszystkie punkty, w których wartości najmniejsza i największa są osiąmane.

Zadanie 3. Rozwiąż zagadnienie początkowe

$$x''(t) = -x(t) + t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 2.$$

Zadanie 4. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych i niech wektory $u, v, w, z \in V$ tworzą układ liniowo niezależny. Udowodnij, że wektory $u + 2v, u + 3v + w, v + 2w, w + z$ też tworzą układ liniowo niezależny.

Zadanie 5. Podaj przykład pierścienia $(R, +, \cdot)$ przemiennego z jedynką (różną od zera) i takiego elementu $a \in R$, że $a^{2024} \neq 0$ oraz $a^{2025} = 0$. Uzasadnij poprawność podanego przykładu.

Zadanie 6. W urnie znajduje się n kul, z których jedna jest biała, a pozostałe $n-1$ to kule czarne. Losujemy z urny n -krotnie po jednej kuli, przy czym po każdym losowaniu wylosowana kula wraca z powrotem do urny (losowanie ze zwracaniem). Niech P_n będzie prawdopodobieństwem, że dokładnie dwa razy wylosowano kulę białą. Oblicz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n.$$