W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

1. Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_{1}^{5} |x-45|+|x+55|\,dx = \mathbf{400}$

b) $\int\limits_{0}^{3} |x-45|+|x+55|\,dx = \mathbf{300}$

c) $\int\limits_{-1}^{6} |x-45|+|x+55|\,dx = \mathbf{700}$

d) $\int\limits_{2}^{4} |x-45|+|x+55|\,dx = \mathbf{200}$

2. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = x^{100}\cdot e^{x^{10}}\,.$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(900)}(0) = \mathbf{900!/80!}$

b) $f^{(800)}(0) = \mathbf{800!/70!}$

c) $f^{(700)}(0) = \mathbf{700!/60!}$

d) $f^{(600)}(0) = \mathbf{600!/50!}$

3. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{x^{3p}+x^{2p}}}{\sqrt{x^{38}+x^{22}}}\,dx,\quad (\mathbf{10,\, 12})$

b) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{x^{3p}+x^{2p}}}{\sqrt{x^{35}+x^{20}}}\,dx,\quad (\mathbf{9,\, 11})$

c) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{x^{3p}+x^{2p}}}{\sqrt{x^{44}+x^{26}}}\,dx,\quad (\mathbf{12,\, 14})$

d) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{x^{3p}+x^{2p}}}{\sqrt{x^{41}+x^{24}}}\,dx,\quad (\mathbf{11,\, 13})$

4. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{3n}\frac{k}{k^2+3n^2}=\mathbf{ln2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2n+1}^{5n}\frac{k}{k^2+3n^2}=\mathbf{ln2}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{6n}\frac{k}{k^2+3n^2}=\frac{\mathbf{ln13}}{\mathbf{2}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{7n}\frac{k}{k^2+3n^2}=\frac{\mathbf{ln13}}{\mathbf{2}}$

5. Podaj w możliwie prostej postaci takie wyrażenia A, B, C, D, aby dla każdej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

a) $$\int\limits_0^{\sqrt{3}}\int\limits_{x^2}^{\sqrt{3}\cdot x} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_A^B\int\limits_C^D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\mathbf{0}$ $B=\boldsymbol{\pi/3}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\frac{\mathbf{sin}\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{cos^2}\boldsymbol{\varphi}}=\frac{\mathbf{tg}\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{cos}\boldsymbol{\varphi}}$

b) $$\int\limits_0^{\sqrt{3}}\int\limits_0^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_A^B\int\limits_C^D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\mathbf{0}$ $B=\boldsymbol{\pi/3}$ $C=\frac{\mathbf{sin}\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{cos^2}\boldsymbol{\varphi}}=\frac{\mathbf{tg}\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{cos}\boldsymbol{\varphi}}$ $D=\boldsymbol{\sqrt{3}/\mathbf{cos}\varphi}$

c) $$\int\limits_0^{1}\int\limits_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_A^B\int\limits_C^D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\mathbf{0}$ $B=\boldsymbol{\pi/4}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\frac{\mathbf{sin}\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{cos^2}\boldsymbol{\varphi}}=\frac{\mathbf{tg}\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{cos}\boldsymbol{\varphi}}$

d) $$\int\limits_0^{1}\int\limits_0^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_A^B\int\limits_C^D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\mathbf{0}$ $B=\boldsymbol{\pi/4}$ $C=\frac{\mathbf{sin}\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{cos^2}\boldsymbol{\varphi}}=\frac{\mathbf{tg}\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{cos}\boldsymbol{\varphi}}$ $D=\boldsymbol{1/\mathbf{cos}\varphi}$

6. Podaj taką liczbę rzeczywistą a, że liczba zespolona z podanej postaci spełnia równanie $\arg z = 2\arg(2+i)$.

a) $z = 1 + ai, \quad a = \mathbf{4/3}$

b) $z = a + i, \quad a = \mathbf{3/4}$

c) $z = 3 + ai, \quad a = \mathbf{4}$

d) $z = a + 3i, \quad a = \mathbf{9/4}$

7. Dla podanych liczb a i b wypisz w kolejności niemalejącej wartości własne (z uwzględnieniem krotności) macierzy $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & b \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

a) $a = 6, \; b = 6, \quad \mathbf{-1,\ 1,\ 4,\ 6}$

b) $a = 6, \; b = 2, \quad \mathbf{-1,\ 2,\ 4,\ 5}$

c) $a = 2, \; b = 6, \quad \mathbf{0,\ 1,\ 3,\ 6}$

d) $a = 2, \; b = 2, \quad \mathbf{0,\ 2,\ 3,\ 5}$

8. Niech $A = (0, 0)$ i $B = (1, 2)$. Dla danego punktu C podaj pole trójkąta ABC.

a) $C = (3, 4), \quad P_{ABC} = \mathbf{1}$

b) $C = (0, 5), \quad P_{ABC} = \mathbf{5/2}$

c) $C = (5, 0), \quad P_{ABC} = \mathbf{5}$

d) $C = (4, 3), \quad P_{ABC} = \mathbf{5/2}$

9. Niech $C(k)$ będzie liczbą ideałów w pierścieniu $\mathbb{Z}$ zawierających liczbę 6^k. Wówczas

a) $C(5) = \mathbf{36}$ b) $C(6) = \mathbf{49}$

c) $C(7) = \mathbf{64}$ d) $C(8) = \mathbf{81}$

10. Zbiorem elementów grupy jest zbiór liczb rzeczywistych, a działanie grupowe "$\circ$" jest określone wzorem $x \circ y = x + y + 16$. Dla podanego elementu g tej grupy podaj element do niego odwrotny.

a) $g = 64,\quad g^{-1} = \mathbf{-96}$ b) $g = 8,\quad g^{-1} = \mathbf{-40}$

c) $g = 4,\quad g^{-1} = \mathbf{-36}$ d) $g = 2,\quad g^{-1} = \mathbf{-34}$

11. W urnie znajduje się 9 kul z kolejnymi liczbami od 1 do 9. Losujemy z urny dwie kule (losowanie bez zwracania). Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że suma liczb napisanych na wylosowanych kulach jest równa n. Podaj w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(16) = \mathbf{1/36}$ b) $P(17) = \mathbf{1/36}$

c) $P(13) = \mathbf{1/12}$ d) $P(15) = \mathbf{1/18}$

12. Zdarzenia losowe A i B są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A)$ i $P(B)$ podaj $P(A \cup B)$.

a) $P(A) = P(B) = 1/6,\quad P(A \cup B) = \mathbf{11/36}$

b) $P(A) = P(B) = 1/3,\quad P(A \cup B) = \mathbf{5/9}$

c) $P(A) = P(B) = 1/4,\quad P(A \cup B) = \mathbf{7/16}$

d) $P(A) = P(B) = 1/5,\quad P(A \cup B) = \mathbf{9/25}$

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

1. Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_{-1}^{6} |x-45|+|x+55|\,dx = \mathbf{700}$

b) $\int\limits_{0}^{3} |x-45|+|x+55|\,dx = \mathbf{300}$

c) $\int\limits_{1}^{5} |x-45|+|x+55|\,dx = \mathbf{400}$

d) $\int\limits_{2}^{4} |x-45|+|x+55|\,dx = \mathbf{200}$

2. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = x^{100}\cdot e^{x^{10}}\,.$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(600)}(0) = \mathbf{600!/50!}$

b) $f^{(700)}(0) = \mathbf{700!/60!}$

c) $f^{(900)}(0) = \mathbf{900!/80!}$

d) $f^{(800)}(0) = \mathbf{800!/70!}$

3. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{x^{3p}+x^{2p}}}{\sqrt{x^{44}+x^{26}}}\,dx,\quad (\mathbf{12,\,14})$

b) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{x^{3p}+x^{2p}}}{\sqrt{x^{38}+x^{22}}}\,dx,\quad (\mathbf{10,\,12})$

c) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{x^{3p}+x^{2p}}}{\sqrt{x^{35}+x^{20}}}\,dx,\quad (\mathbf{9,\,11})$

d) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{x^{3p}+x^{2p}}}{\sqrt{x^{41}+x^{24}}}\,dx,\quad (\mathbf{11,\,13})$

4. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{6n}\frac{k}{k^2+3n^2}=\frac{\mathbf{ln13}}{\mathbf{2}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2n+1}^{5n}\frac{k}{k^2+3n^2}=\mathbf{ln2}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{3n}\frac{k}{k^2+3n^2}=\mathbf{ln2}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{7n}\frac{k}{k^2+3n^2}=\frac{\mathbf{ln13}}{\mathbf{2}}$

5. Podaj w możliwie prostej postaci takie wyrażenia A, B, C, D, aby dla każdej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

a) $\int\limits_0^1\int\limits_0^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_A^B\int\limits_C^D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$

$A=\mathbf{0}$ $B=\boldsymbol{\pi/4}$ $C=\frac{\mathbf{sin}\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{cos^2}\boldsymbol{\varphi}}=\frac{\mathbf{tg}\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{cos}\boldsymbol{\varphi}}$ $D=\mathbf{1/cos}\boldsymbol{\varphi}$

b) $\int\limits_0^1\int\limits_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_A^B\int\limits_C^D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$

$A=\mathbf{0}$ $B=\boldsymbol{\pi/4}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\frac{\mathbf{sin}\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{cos^2}\boldsymbol{\varphi}}=\frac{\mathbf{tg}\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{cos}\boldsymbol{\varphi}}$

c) $\int\limits_0^{\sqrt{3}}\int\limits_{x^2}^{\sqrt{3}\cdot x} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_A^B\int\limits_C^D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$

$A=\mathbf{0}$ $B=\boldsymbol{\pi/3}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\frac{\mathbf{sin}\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{cos^2}\boldsymbol{\varphi}}=\frac{\mathbf{tg}\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{cos}\boldsymbol{\varphi}}$

d) $\int\limits_0^{\sqrt{3}}\int\limits_0^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_A^B\int\limits_C^D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$

$A=\mathbf{0}$ $B=\boldsymbol{\pi/3}$ $C=\frac{\mathbf{sin}\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{cos^2}\boldsymbol{\varphi}}=\frac{\mathbf{tg}\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{cos}\boldsymbol{\varphi}}$ $D=\boldsymbol{\sqrt{3}}\mathbf{/cos}\boldsymbol{\varphi}$

6. Podaj taką liczbę rzeczywistą a, że liczba zespolona z podanej postaci spełnia równanie $\arg z = 2\arg(2+i)$.

a) $z=3+ai, \quad a=\mathbf{4}$

b) $z=a+i, \quad a=\mathbf{3/4}$

c) $z=1+ai, \quad a=\mathbf{4/3}$

d) $z=a+3i, \quad a=\mathbf{9/4}$

7. Dla podanych liczb a i b wypisz w kolejności niemalejącej wartości własne (z uwzględnieniem krotności) macierzy $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & b \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

a) $a=2, \ b=2, \quad \mathbf{0, 2, 3, 5}$

b) $a=2, \ b=6, \quad \mathbf{0, 1, 3, 6}$

c) $a=6, \ b=6, \quad \mathbf{-1, 1, 4, 6}$

d) $a=6, \ b=2, \quad \mathbf{-1, 2, 4, 5}$

8. Niech $A=(0,0)$ i $B=(1,2)$. Dla danego punktu C podaj pole trójkąta ABC.

a) $C=(5,0), \quad P_{ABC}=\mathbf{5}$

b) $C=(3,4), \quad P_{ABC}=\mathbf{1}$

c) $C=(0,5), \quad P_{ABC}=\mathbf{5/2}$

d) $C=(4,3), \quad P_{ABC}=\mathbf{5/2}$

9. Niech $C(k)$ będzie liczbą ideałów w pierścieniu $\mathbb{Z}$ zawierających liczbę 6^k. Wówczas

a) $C(7) = \mathbf{64}$ b) $C(6) = \mathbf{49}$

c) $C(5) = \mathbf{36}$ d) $C(8) = \mathbf{81}$

10. Zbiorem elementów grupy jest zbiór liczb rzeczywistych, a działanie grupowe "$\circ$" jest określone wzorem $x \circ y = x + y + 16$. Dla podanego elementu g tej grupy podaj element do niego odwrotny.

a) $g = 2, \quad g^{-1} = \mathbf{-34}$ b) $g = 4, \quad g^{-1} = \mathbf{-36}$

c) $g = 64, \quad g^{-1} = \mathbf{-96}$ d) $g = 8, \quad g^{-1} = \mathbf{-40}$

11. W urnie znajduje się 9 kul z kolejnymi liczbami od 1 do 9. Losujemy z urny dwie kule (losowanie bez zwracania). Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że suma liczb napisanych na wylosowanych kulach jest równa n. Podaj w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(13) = \mathbf{1/12}$ b) $P(16) = \mathbf{1/36}$

c) $P(17) = \mathbf{1/36}$ d) $P(15) = \mathbf{1/18}$

12. Zdarzenia losowe A i B są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A)$ i $P(B)$ podaj $P(A \cup B)$.

a) $P(A) = P(B) = 1/6, \quad P(A \cup B) = \mathbf{11/36}$

b) $P(A) = P(B) = 1/5, \quad P(A \cup B) = \mathbf{9/25}$

c) $P(A) = P(B) = 1/4, \quad P(A \cup B) = \mathbf{7/16}$

d) $P(A) = P(B) = 1/3, \quad P(A \cup B) = \mathbf{5/9}$

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

1. Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_{-1}^{6} |x-45|+|x+55|\,dx = \mathbf{700}$

b) $\int\limits_{1}^{5} |x-45|+|x+55|\,dx = \mathbf{400}$

c) $\int\limits_{2}^{4} |x-45|+|x+55|\,dx = \mathbf{200}$

d) $\int\limits_{0}^{3} |x-45|+|x+55|\,dx = \mathbf{300}$

2. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = x^{100}\cdot e^{x^{10}}\,.$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(900)}(0) = \mathbf{900!/80!}$

b) $f^{(700)}(0) = \mathbf{700!/60!}$

c) $f^{(600)}(0) = \mathbf{600!/50!}$

d) $f^{(800)}(0) = \mathbf{800!/70!}$

3. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{x^{3p}+x^{2p}}}{\sqrt{x^{35}+x^{20}}}\,dx,\quad \mathbf{(9,\,11)}$

b) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{x^{3p}+x^{2p}}}{\sqrt{x^{38}+x^{22}}}\,dx,\quad \mathbf{(10,\,12)}$

c) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{x^{3p}+x^{2p}}}{\sqrt{x^{44}+x^{26}}}\,dx,\quad \mathbf{(12,\,14)}$

d) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{x^{3p}+x^{2p}}}{\sqrt{x^{41}+x^{24}}}\,dx,\quad \mathbf{(11,\,13)}$

4. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{6n}\frac{k}{k^2+3n^2}=\frac{\mathbf{ln13}}{\mathbf{2}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{3n}\frac{k}{k^2+3n^2}=\mathbf{ln2}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{7n}\frac{k}{k^2+3n^2}=\frac{\mathbf{ln13}}{\mathbf{2}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2n+1}^{5n}\frac{k}{k^2+3n^2}=\mathbf{ln2}$

5. Podaj w możliwie prostej postaci takie wyrażenia A, B, C, D, aby dla każdej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

a) $$\int\limits_0^{\sqrt{3}}\int\limits_{x^2}^{\sqrt{3}\cdot x} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_A^B\int\limits_C^D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\mathbf{0}$ $B=\boldsymbol{\pi/3}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\frac{\mathbf{sin}\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{cos^2}\boldsymbol{\varphi}}=\frac{\mathbf{tg}\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{cos}\boldsymbol{\varphi}}$

b) $$\int\limits_0^{1}\int\limits_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_A^B\int\limits_C^D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\mathbf{0}$ $B=\boldsymbol{\pi/4}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\frac{\mathbf{sin}\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{cos^2}\boldsymbol{\varphi}}=\frac{\mathbf{tg}\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{cos}\boldsymbol{\varphi}}$

c) $$\int\limits_0^{1}\int\limits_{0}^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_A^B\int\limits_C^D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\mathbf{0}$ $B=\boldsymbol{\pi/4}$ $C=\frac{\mathbf{sin}\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{cos^2}\boldsymbol{\varphi}}=\frac{\mathbf{tg}\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{cos}\boldsymbol{\varphi}}$ $D=\mathbf{1/cos}\boldsymbol{\varphi}$

d) $$\int\limits_0^{\sqrt{3}}\int\limits_{0}^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_A^B\int\limits_C^D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\mathbf{0}$ $B=\boldsymbol{\pi/3}$ $C=\frac{\mathbf{sin}\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{cos^2}\boldsymbol{\varphi}}=\frac{\mathbf{tg}\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{cos}\boldsymbol{\varphi}}$ $D=\boldsymbol{\sqrt{3}}\mathbf{/cos}\boldsymbol{\varphi}$

6. Podaj taką liczbę rzeczywistą a, że liczba zespolona z podanej postaci spełnia równanie $\arg z = 2\arg(2+i)$.

a) $z=3+ai,\quad a=\mathbf{4}$

b) $z=1+ai,\quad a=\mathbf{4/3}$

c) $z=a+3i,\quad a=\mathbf{9/4}$

d) $z=a+i,\quad a=\mathbf{3/4}$

7. Dla podanych liczb a i b wypisz w kolejności niemalejącej wartości własne (z uwzględnieniem krotności) macierzy $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & b \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

a) $a=6,\ \ b=6,\quad \mathbf{-1,\ 1,\ 4,\ 6}$

b) $a=2,\ \ b=6,\quad \mathbf{0,\ 1,\ 3,\ 6}$

c) $a=2,\ \ b=2,\quad \mathbf{0,\ 2,\ 3,\ 5}$

d) $a=6,\ \ b=2,\quad \mathbf{-1,\ 2,\ 4,\ 5}$

8. Niech $A=(0,0)$ i $B=(1,2)$. Dla danego punktu C podaj pole trójkąta ABC.

a) $C=(0,5),\quad P_{ABC}=\mathbf{5/2}$

b) $C=(3,4),\quad P_{ABC}=\mathbf{1}$

c) $C=(5,0),\quad P_{ABC}=\mathbf{5}$

d) $C=(4,3),\quad P_{ABC}=\mathbf{5/2}$

9. Niech $C(k)$ będzie liczbą ideałów w pierścieniu $\mathbb{Z}$ zawierających liczbę 6^k. Wówczas

a) $C(7)=\mathbf{64}$

b) $C(5)=\mathbf{36}$

c) $C(8)=\mathbf{81}$

d) $C(6)=\mathbf{49}$

10. Zbiorem elementów grupy jest zbiór liczb rzeczywistych, a działanie grupowe "$\circ$" jest określone wzorem $x\circ y=x+y+16$. Dla podanego elementu g tej grupy podaj element do niego odwrotny.

a) $g=64,\quad g^{-1}=\mathbf{-96}$

b) $g=4,\quad g^{-1}=\mathbf{-36}$

c) $g=2,\quad g^{-1}=\mathbf{-34}$

d) $g=8,\quad g^{-1}=\mathbf{-40}$

11. W urnie znajduje się 9 kul z kolejnymi liczbami od 1 do 9. Losujemy z urny dwie kule (losowanie bez zwracania). Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że suma liczb napisanych na wylosowanych kulach jest równa n. Podaj w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(17)=\mathbf{1/36}$

b) $P(16)=\mathbf{1/36}$

c) $P(13)=\mathbf{1/12}$

d) $P(15)=\mathbf{1/18}$

12. Zdarzenia losowe A i B są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A)$ i $P(B)$ podaj $P(A\cup B)$.

a) $P(A)=P(B)=1/6,\quad P(A\cup B)=\mathbf{11/36}$

b) $P(A)=P(B)=1/4,\quad P(A\cup B)=\mathbf{7/16}$

c) $P(A)=P(B)=1/5,\quad P(A\cup B)=\mathbf{9/25}$

d) $P(A)=P(B)=1/3,\quad P(A\cup B)=\mathbf{5/9}$

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

1. Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_{1}^{5} |x-45|+|x+55|\,dx = \mathbf{400}$

b) $\int\limits_{2}^{4} |x-45|+|x+55|\,dx = \mathbf{200}$

c) $\int\limits_{0}^{3} |x-45|+|x+55|\,dx = \mathbf{300}$

d) $\int\limits_{-1}^{6} |x-45|+|x+55|\,dx = \mathbf{700}$

2. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = x^{100}\cdot e^{x^{10}}.$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(900)}(0) = \mathbf{900!/80!}$

b) $f^{(600)}(0) = \mathbf{600!/50!}$

c) $f^{(800)}(0) = \mathbf{800!/70!}$

d) $f^{(700)}(0) = \mathbf{700!/60!}$

3. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{x^{3p}+x^{2p}}}{\sqrt{x^{44}+x^{26}}}\,dx,\quad \mathbf{(12,\,14)}$

b) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{x^{3p}+x^{2p}}}{\sqrt{x^{38}+x^{22}}}\,dx,\quad \mathbf{(10,\,12)}$

c) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{x^{3p}+x^{2p}}}{\sqrt{x^{41}+x^{24}}}\,dx,\quad \mathbf{(11,\,13)}$

d) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{x^{3p}+x^{2p}}}{\sqrt{x^{35}+x^{20}}}\,dx,\quad \mathbf{(9,\,11)}$

4. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{3n}\frac{k}{k^2+3n^2}=\mathbf{ln2}$　　b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{7n}\frac{k}{k^2+3n^2}=\frac{\mathbf{ln13}}{\mathbf{2}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2n+1}^{5n}\frac{k}{k^2+3n^2}=\mathbf{ln2}$　　d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{6n}\frac{k}{k^2+3n^2}=\frac{\mathbf{ln13}}{\mathbf{2}}$

5. Podaj w możliwie prostej postaci takie wyrażenia A, B, C, D, aby dla każdej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

a) $\int\limits_0^{\sqrt{3}}\int\limits_{x^2}^{\sqrt{3}\cdot x} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_A^B\int\limits_C^D f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$

$A=\mathbf{0}$　　$B=\boldsymbol{\pi/3}$　　$C=\mathbf{0}$　　$D=\frac{\mathbf{sin}\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{cos^2}\boldsymbol{\varphi}}=\frac{\mathbf{tg}\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{cos}\boldsymbol{\varphi}}$

b) $\int\limits_0^{1}\int\limits_{0}^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_A^B\int\limits_C^D f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$

$A=\mathbf{0}$　　$B=\boldsymbol{\pi/4}$　　$C=\frac{\mathbf{sin}\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{cos^2}\boldsymbol{\varphi}}=\frac{\mathbf{tg}\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{cos}\boldsymbol{\varphi}}$　　$D=\mathbf{1/cos}\boldsymbol{\varphi}$

c) $\int\limits_0^{\sqrt{3}}\int\limits_{0}^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_A^B\int\limits_C^D f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$

$A=\mathbf{0}$　　$B=\boldsymbol{\pi/3}$　　$C=\frac{\mathbf{sin}\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{cos^2}\boldsymbol{\varphi}}=\frac{\mathbf{tg}\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{cos}\boldsymbol{\varphi}}$　　$D=\boldsymbol{\sqrt{3}}\mathbf{/cos}\boldsymbol{\varphi}$

d) $\int\limits_0^{1}\int\limits_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_A^B\int\limits_C^D f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$

$A=\mathbf{0}$　　$B=\boldsymbol{\pi/4}$　　$C=\mathbf{0}$　　$D=\frac{\mathbf{sin}\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{cos^2}\boldsymbol{\varphi}}=\frac{\mathbf{tg}\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{cos}\boldsymbol{\varphi}}$

6. Podaj taką liczbę rzeczywistą a, że liczba zespolona z podanej postaci spełnia równanie $\arg z = 2\arg(2+i)$.

a) $z=1+ai$, $a=\mathbf{4/3}$

b) $z=a+3i$, $a=\mathbf{9/4}$

c) $z=a+i$, $a=\mathbf{3/4}$

d) $z=3+ai$, $a=\mathbf{4}$

7. Dla podanych liczb a i b wypisz w kolejności niemalejącej wartości własne (z uwzględnieniem krotności) macierzy $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & b \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

a) $a=6$, $b=6$, $\mathbf{-1, 1, 4, 6}$

b) $a=2$, $b=2$, $\mathbf{0, 2, 3, 5}$

c) $a=6$, $b=2$, $\mathbf{-1, 2, 4, 5}$

d) $a=2$, $b=6$, $\mathbf{0, 1, 3, 6}$

8. Niech $A=(0,0)$ i $B=(1,2)$. Dla danego punktu C podaj pole trójkąta ABC.

a) $C=(5,0)$, $P_{ABC}=\mathbf{5}$

b) $C=(3,4)$, $P_{ABC}=\mathbf{1}$

c) $C=(4,3)$, $P_{ABC}=\mathbf{5/2}$

d) $C=(0,5)$, $P_{ABC}=\mathbf{5/2}$

9. Niech $C(k)$ będzie liczbą ideałów w pierścieniu $\mathbb{Z}$ zawierających liczbę 6^k. Wówczas

a) $C(5) = \mathbf{36}$

b) $C(8) = \mathbf{81}$

c) $C(6) = \mathbf{49}$

d) $C(7) = \mathbf{64}$

10. Zbiorem elementów grupy jest zbiór liczb rzeczywistych, a działanie grupowe "$\circ$" jest określone wzorem $x \circ y = x + y + 16$. Dla podanego elementu g tej grupy podaj element do niego odwrotny.

a) $g = 64, \quad g^{-1} = \mathbf{-96}$

b) $g = 2, \quad g^{-1} = \mathbf{-34}$

c) $g = 8, \quad g^{-1} = \mathbf{-40}$

d) $g = 4, \quad g^{-1} = \mathbf{-36}$

11. W urnie znajduje się 9 kul z kolejnymi liczbami od 1 do 9. Losujemy z urny dwie kule (losowanie bez zwracania). Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że suma liczb napisanych na wylosowanych kulach jest równa n. Podaj w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(13) = \mathbf{1/12}$

b) $P(16) = \mathbf{1/36}$

c) $P(15) = \mathbf{1/18}$

d) $P(17) = \mathbf{1/36}$

12. Zdarzenia losowe A i B są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A)$ i $P(B)$ podaj $P(A \cup B)$.

a) $P(A) = P(B) = 1/6, \quad P(A \cup B) = \mathbf{11/36}$

b) $P(A) = P(B) = 1/5, \quad P(A \cup B) = \mathbf{9/25}$

c) $P(A) = P(B) = 1/3, \quad P(A \cup B) = \mathbf{5/9}$

d) $P(A) = P(B) = 1/4, \quad P(A \cup B) = \mathbf{7/16}$