

EGZAMIN MAGISTERSKI, 09.09.2024 r.
Matematyka w ekonomii

Zadanie **1.** (8 punktów)

W badaniu zanieczyszczenia strumienia wody, stężenie zanieczyszczenia jest mierzone w 5 różnych miejscach. Miejsca te znajdują się w różnych odległościach od źródła zanieczyszczenia. W poniższej tabeli podano te odległości i średnie zanieczyszczenie:

Odległość do źródła zanieczyszczenia (w km)	2	4	6	8	10
Średnie stężenie	11,5	10,2	10,3	9,68	9,32

Dane zostały zamodelowane przy pomocy standardowego modelu regresji liniowej

$$y = \beta_1 x + \beta_0 + \epsilon.$$

Jakie jest oszacowania parametru:

- (a) β_1 ,
- (b) β_0 ,
- (c) odchylenia standardowego błędu ϵ ?

Zadanie **2.** (8 punktów)

Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie gamma z parametrami α i β , a Y zmienną losową o rozkładzie beta z parametrami α i β . Wyznacz EX^k oraz EY^k , $k \in \mathbb{N}_+$.

Zadanie **3.** (8 punktów)

Rozpatrzmy proces stochastyczny $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ zdefiniowany rekurencyjnie

$$X_t - 0,75X_{t-1} + 0,5625X_{t-2} = W_t + 1,25W_{t-1},$$

gdzie $\{W_t\}$ jest to ciąg i.i.d zmiennych losowych o rozkładzie $N(0, 1)$.

- (i) Określ jakiego typu szeregiem czasowym jest powyżej zdefiniowany proces stochastyczny?
- (ii) Czy jest to proces wynikowy?
- (ii) Czy jest to proces odwracalny?

Zadanie **4.** (8 punktów)

Para zmiennych losowych (X, Y) ma łączny rozkład zadany następującą tablicą funkcji prawdopodobieństwa $p(i, j) = \mathbb{P}(X = i, Y = j)$:

Tabela 1: Funkcja prawdopodobieństwa $p(i, j)$ łącznego rozkładu (X, Y)

$i \backslash j$	0	1	2	3
0	1/8	1/8	0	0
1	1/8	1/8	0	0
2	0	0	1/8	1/8
3	0	0	1/8	1/8

- 1 Czy zmienne losowe X, Y są niezależne. Uzasadnij odpowiedź.
- 2 Niech $Z = \min(2, XY)$. Obliczyć $\mathbb{E}Z$.
- 3 Rozkład pary zmiennych losowych (W, V) ma funkcję prawdopodobieństwa $p_{W,V}(i, j) = \mathbb{P}(X = i, Y = j | X + Y \leq 2)$. Policz kowariancję $\text{cov}(W, V)$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 09.09.2024 r.
Nauczycielska

Zadanie **1.** (8 punktów)

Rozważmy przestrzeń miarową $(\mathbb{R}, \text{Bor}(\mathbb{R}), \lambda)$, gdzie λ jest miarą Lebesgue'a.

- (2) Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = 3x - 2$. Niech $A = [1, 3] \setminus \mathbb{Q}$. Oblicz

$$\int_A f \, d\lambda.$$

- (3) Podaj przykład funkcji $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, która nie jest całkowalna w sensie Riemanna, ale jest borelowska (borelowskość tej funkcji należy wykazać). Przypomnijmy, że $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ jest borelowska, jeżeli $f^{-1}[B]$ jest zbiorem borelowskim dla każdego borelowskiego zbioru $B \subseteq \mathbb{R}$.
- (3) Pokaż, że jeżeli $f = g$ prawie wszędzie, to

$$\int f \, d\lambda = \int g \, d\lambda,$$

o ile te całki istnieją. Pokaż, że niekoniecznie zachodzi odwrotna implikacja.

Zadanie **2.** (8 punktów)

Udowodnij, że dla dowolnego naturalnego n liczba $8^n + 6$ jest podzielna przez 7.

Zadanie **3.** (8 punktów)

Ściany pewnego wypukłego wielościanu są albo trójkątami równobocznymi, albo kwadratami, przy czym żadne dwie ściany trójkątne, ani żadne dwie ściany kwadratowe, nie mają wspólnej krawędzi.

1. Uzasadnij, że każdy wierzchołek tej bryły zawiera się w dokładnie czterech ścianach.

2. Korzystając z (1) oraz z tożsamości Eulera, znajdź liczbę ścian, krawędzi i wierzchołków w tym wielościanie.
3. Naskicuj siatkę tego wielościanu.

Zadanie **4.** (8 punktów)

Na zbiorze $X := \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ wprowadzamy relację podzielności: $a|b$ jeśli $b = ka$ dla pewnego k naturalnego.

- a) Uzasadnij, że relacja „|” jest częściowym porządkiem na X .
- b) Wskaż elementy minimalne i maksymalne w zbiorze X względem tej relacji. Czy istnieje element najmniejszy w zbiorze X względem tej relacji? Czy istnieje element największy w zbiorze X względem tej relacji?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 09.09.2024 r.
Matematyka teoretyczna

Zadanie **1.** (8 punktów)

Rozważmy przestrzeń miarową $(\mathbb{R}, \text{Bor}(\mathbb{R}), \lambda)$, gdzie λ jest miarą Lebesgue'a.

- (2) Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = 3x - 2$. Niech $A = [1, 3] \setminus \mathbb{Q}$. Oblicz

$$\int_A f \, d\lambda.$$

- (3) Podaj przykład funkcji $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, która nie jest całkowalna w sensie Riemanna, ale jest borelowska (borelowskość tej funkcji należy wykazać). Przypomnijmy, że $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ jest borelowska, jeżeli $f^{-1}[B]$ jest zbiorem borelowskim dla każdego borelowskiego zbioru $B \subseteq \mathbb{R}$.

- (3) Pokaż, że jeżeli $f = g$ prawie wszędzie, to

$$\int f \, d\lambda = \int g \, d\lambda,$$

o ile te całki istnieją. Pokaż, że niekoniecznie zachodzi odwrotna implikacja.

Zadanie **2.** (8 punktów)

- (a) Podaj definicję centrum grupy G , oznaczanego przez $Z(G)$.
- (b) Udowodnij, że jeśli G jest grupą nieprzemianną, to $G/Z(G)$ nie jest grupą cykliczną.
- (c) Podaj definicję automorfizmu wewnętrznego grupy.
- (d) Udowodnij, że grupa automorfizmów wewnętrznych dowolnej grupy G jest izomorficzna z $G/Z(G)$.

Zadanie 4. (8 punktów)

Okrąg $(x - 2)^2 + z^2 = 1$ leżący na płaszczyźnie Oxz w układzie kartezjańskim $Oxyz$ w przestrzeni obrócono wokół osi Oz tworząc torus T . Uzasadnij, że przekształcenie $r : T \rightarrow T$ torusa T w siebie zadane przez obrót w przestrzeni o kąt π wokół osi Ox nie jest homotopijne z przekształceniem identycznościowym $\text{id}_T : T \rightarrow T$.

Zadanie 4. (8 punktów)

Założmy, że $a, b \in \mathbb{C}$ są takie, że $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}] = 2$ oraz $[\mathbb{Q}(b) : \mathbb{Q}] = 3$.

1. Czy możliwe jest że $[\mathbb{Q}(a/b) : \mathbb{Q}] = 6$? Odpowiedź uzasadnić (tzn. albo podać przykład z dowodem, albo udowodnić nieistnienie)!
2. Czy możliwe jest że $[\mathbb{Q}(a/b) : \mathbb{Q}] = 3$? Odpowiedź uzasadnić (tzn. albo podać przykład z dowodem, albo udowodnić nieistnienie)!

Zadanie 4. (8 punktów)

- (3) Pokaż, że $A \subseteq 2^\omega$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy A jest ciałem $[T]$ pewnego drzewa $T \subseteq 2^{<\omega}$.
- (3) Pokaż, że dla każdego zbioru $S \subseteq 2^{<\omega}$ zbiór $\{x \in 2^\omega : \exists^\infty n \ x|n \in S\}$ jest typu G_δ .
- (2) Podaj przykład zbioru $A \subseteq 2^\omega$, który nie jest G_δ , ale jest F_σ .

Zadanie 4. (8 punktów)

Uzasadnij, że zagadnienie

$$y' = 1 - y^2, \quad y(0) = 0$$

ma rozwiązanie istniejące dla wszystkich $t \geq 0$, natomiast zagadnienie

$$y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0$$

nie ma rozwiązania, które istnieje dla wszystkich $t \geq 0$.

Zadanie 4. (8 punktów)

W tym zadaniu rozważamy operatory liniowe na przestrzeni l^2 (ciągów liczb zespolonych sumowalnych z kwadratem).

1. Podaj przykład nieodwracalnego operatora zwartego, który ma nieskończenie wiele wartości własnych.

2. Udowodnij, że operator T_1 zadany wzorem

$$T_1(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_1, x_4, x_3, x_6, x_5, \dots)$$

nie jest zwarty.

3. Wyznacz operator sprzężony T_2^* do operatora T_2 zadanego wzorem

$$T_2(x_1, x_2, \dots) = \left(0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \frac{x_4}{4}, \dots\right).$$

4. Pokaż, że T_2 nie ma niezerowych wartości własnych i udowodnij, że T_2 jest zwarty.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 09.09.2024 r.
Analiza danych

Zadanie **1. (8 punktów)**

Rozważmy następujący ukryty model Markowa:

(Ukryte) stany: $\mathcal{S} = \{1, 2\}$. Macierz prawdopodobieństw przejść między stanami jest następująca:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

Zbiór obserwacji: $\mathcal{V} = \{A, B\}$.

Prawdopodobieństwa obserwacji będąc w każdym ze stanów $s \in \mathcal{S}$:

$$P(o_t = A|q_t = 1) = 0.8 \quad P(o_t = B|q_t = 1) = 0.2$$

$$P(o_t = A|q_t = 2) = 0.5 \quad P(o_t = B|q_t = 2) = 0.5$$

Znamy również rozkład początkowy łańcucha:

$$P(X_1 = 1) = 1, \quad P(X_1 = 2) = 0.$$

Zaobserwowaliśmy BBA , tzn., $O = o_1 o_2 o_3 = BBA$. Niech $Q^* = q_1^* q_2^* q_3^*$ oznacza najbardziej prawdopodobny ciąg ukrytych stanów, tj.

$$Q^* = \arg \max_{Q=q_1 q_2 q_3} P(Q|O, \lambda).$$

Używając algorytmu Viterbiego wylicz stan q_3^* , tj. stan w chwili $t = 3$ najbardziej prawdopodobnej ścieżki $Q^* = q_1^* q_2^* q_3^*$.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Niech (X, Y) ma dwuwymiarowy rozkład normalny z parametrami $\mu_1 = 3, \mu_2 = 1, \sigma_1^2 = 16, \sigma_2^2 = 25, \rho = 3$. Oblicz $P(-3 < X < 3|Y = -4)$ i $P(3 < Y < 8|X = 7)$.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech U_1, U_2, U_3, U_4 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $U(0, 1)$. Obserwujemy zmienną losową X i na jej podstawie weryfikujemy

$$H_0 : X \text{ ma rozkład taki jak } \min\{U_1, U_2, U_3, U_4\}$$

przeciwno

$$H_1 : X \text{ ma rozkład taki jak } \min\{U_1, U_2, U_3\}.$$

Wyznacz moc testu jednostajnie najmocniejszego na poziomie istotności α .

Zadanie **4.** (8 punktów)

Para zmiennych losowych (X, Y) ma łączny rozkład zadany następującą tablicą funkcji prawdopodobieństwa $p(i, j) = \mathbb{P}(X = i, Y = j)$:

Tabela 2: Funkcja prawdopodobieństwa $p(i, j)$ łącznego rozkładu (X, Y)

$i \backslash j$	0	1	2	3
0	1/8	1/8	0	0
1	1/8	1/8	0	0
2	0	0	1/8	1/8
3	0	0	1/8	1/8

- 1 Czy zmienne losowe X, Y są niezależne. Uzasadnij odpowiedź.
- 2 Niech $Z = \min(2, XY)$. Obliczyć $\mathbb{E}Z$.
- 3 Rozkład pary zmiennych losowych (W, V) ma funkcję prawdopodobieństwa $p_{W,V}(i, j) = \mathbb{P}(X = i, Y = j | X + Y \leq 2)$. Policzyc kowariancję $\text{cov}(W, V)$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 09.09.2024 r.
Aktuarialno-finansowa

Zadanie **1. (8 punktów)**

Niech $\{B_i(t) : t \geq 0\}$, $i = 1, 2, \dots$ będą wzajemnie niezależnymi standardowymi procesami Wienera określonymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej.

a) Znaleźć funkcję $f(\cdot) : N \rightarrow R$ taką, że dla każdego $n \in N$ proces stochastyczny

$$W_n(t) := \frac{1}{f(n)} \sum_{i=1}^n B_i(it), \quad t \geq 0$$

jest standardowym procesem Wienera.

b) Załóżmy, że $n \leq m$ oraz $n, m \in N$. Ile wynosi

$$\text{Cov}(W_n(1), W_m(1))?$$

Odpowiedzi uzasadnić.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Para zmiennych losowych (X, Y) ma łączny rozkład zadany następującą tablicą funkcji prawdopodobieństwa $p(i, j) = \mathbb{P}(X = i, Y = j)$:

Tabela 3: Funkcja prawdopodobieństwa $p(i, j)$ łącznego rozkładu (X, Y)

$i \backslash j$	0	1	2	3
0	1/8	1/8	0	0
1	1/8	1/8	0	0
2	0	0	1/8	1/8
3	0	0	1/8	1/8

1 Czy zmienne losowe X, Y są niezależne. Uzasadnij odpowiedź.

2 Niech $Z = \min(2, XY)$. Obliczyć $\mathbb{E}Z$.

3 Rozkład pary zmiennych losowych (W, V) ma funkcję prawdopodobieństwa $p_{W,V}(i, j) = \mathbb{P}(X = i, Y = j | X + Y \leq 2)$. Policz kowariancję $\text{cov}(W, V)$.

Zadanie **3.** (8 punktów)

Niech

$$Z = Z_1 + Z_2,$$

gdzie Z_1 to obecna wartość n -letniego ubezpieczenia terminowego, Z_2 to obecna wartość n -letniego czystego ubezpieczenia na dożycie. Udowodnij, że

$$\text{Var}(Z) < \text{Var}(Z_1) + \text{Var}(Z_2),$$

czyli, że firma ubezpieczeniowa ponosi mniejsze ryzyko sprzedając jednej osobie polisę na dożycie (mieszane ubezpieczenie na życie i dożycie) niż oddzielnie: jednej osobie - ubezpieczenie terminowe na życie a drugiej osobie - czyste ubezpieczenie na dożycie.

Zadanie **4.** (8 punktów)

Przyjmij świat modelu Blacka-Scholesa. Klient A kupił opcję (long) call na 1 akcję z następującymi parametrami:

- Bieżąca cena akcji (S): 100 PLN
- Cena wykonania opcji (K): 105 PLN
- Czas do wygaśnięcia opcji (T): 1 rok (365 dni)
- Stopa procentowa wolna od ryzyka (r): 5% rocznie
- Zmienność akcji (σ): 20% rocznie
- Koszt dywidendy (q): 0% (zakładamy brak wypłaty dywidendy)

Instytucja finansowa, która sprzedała opcję klientowi A (i która będzie ją replikować przy pomocy deltahedgingu), wyceniła ją korzystając z równania Blacka-Scholesa przy założeniu, że krótka sprzedaż akcji (posiadanie ujemnej liczby akcji) nie jest obarczona żadnymi dodatkowymi kosztami.

O ile wzrósłby koszt, gdyby instytucja finansowa założyła, że krótka sprzedaż instrumentu podstawowego kosztuje zgodnie z zadaną stopą $R = 2\%$ (proporcjonalnie do czasu i wartości akcji posiadanych krótko). Uzasadnij.