

EGZAMIN LICENCJACKI (zadania otwarte)
28 czerwca 2024 r.

Zadanie **1.** Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{2\pi} \sin^{2023} x \cdot \cos^{2024} x \cdot \ln(2025 + \sin^{2026} x) \cdot e^{\cos 2027x} dx.$$

Zadanie **2.** Dowieść, że

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy^3}{x^2 + y^4} = 0.$$

Zadanie **3.** Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$x'(t) = 1 - x(t) + t, \quad x(0) = 1.$$

Zadanie **4.** Dana jest macierz rzeczywista A wymiaru 4×4 . Załóżmy, że A jest diagonalizowalna. Udowodnić, że A^3 też jest diagonalizowalna.

Zadanie **5.** Niech $(R, +, \cdot)$ będzie pierścieniem przemiennym z jedynką (różną od zera). Niech $a \in R$ będzie takim elementem, że $a^{2024} = 0$. Dowieść, że wówczas a jest dzielnikiem zera w tym pierścieniu.

W rozwiązaniu powinno się znaleźć precyzyjne sformułowanie definicji dzielnika zera.

Zadanie **6.** Jasnowidz, który z prawdopodobieństwem 0,6 potrafi przewidzieć wynik rzutu monetą, chce wykorzystać swoje zdolności do łatwego zarobienia pieniędzy. W tym celu namawia Olgę i Roberta do rozegrania 100 rozgrywek następującej gry. W pojedynczej rozgrywce gracze wkładają do puli po 100 złotych i obstawiają, jaki będzie wynik rzutu monetą. Następnie wykonuje się rzut monetą i dzieli pulę (300 złotych) po równo pomiędzy graczy, którzy trafnie przewidzieli wynik. Olga zawsze obstawia orła, Robert zawsze obstawia reszkę, a Jasnowidz obstawia to, co mu podpowiada jego wizja przyszłości, sprawdzająca się z prawdopodobieństwem 0,6.

Jaka jest wartość oczekiwana wygranej netto Jasnowidza po 100 rozgrywkach?