1. Podać wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{k^2+n^2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{4n}\frac{n}{k^2+16n^2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{16}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{6n}\frac{n}{k^2+36n^2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{24}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{10n}\frac{n}{k^2+100n^2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{40}}$

2. Podać zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int\limits_0^\infty\frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{32}+x^{10}}}\,dx$, $\mathbf{(8,15)}$

b) $\int\limits_0^\infty\frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{26}+x^{9}}}\,dx$, $\mathbf{(7,12)}$

c) $\int\limits_0^\infty\frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{20}+x^{8}}}\,dx$, $\mathbf{(6,9)}$

d) $\int\limits_0^\infty\frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{14}+x^{7}}}\,dx$, $\mathbf{(5,6)}$

3. Podać promień zbieżności szeregu potęgowego.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}\cdot n!\cdot x^{2n}}{n^n}$, $R=\boldsymbol{\sqrt{e}/2}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}\cdot n!\cdot x^{n}}{n^n}$, $R=\mathbf{e/4}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{4n}{n}\cdot n!\cdot x^{n}}{n^n}$, $R=\mathbf{27e/256}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{3n}{n}\cdot n!\cdot x^{n}}{n^n}$, $R=\mathbf{4e/27}$

4. Podać kres górny zbioru.

a) $\sup\left\{\frac{1}{x^{20}+10x^{10}+57}: x\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{1/57}$

b) $\sup\left\{\frac{1}{x^{6}+10x^{3}+27}: x\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{1/2}$

c) $\sup\left\{\frac{1}{x^{8}+10x^{4}+37}: x\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{1/37}$

d) $\sup\left\{\frac{1}{x^{12}-10x^{6}+47}: x\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{1/22}$

5. Podać kres dolny zbioru.

a) $\inf\left\{x^2+y^2+2x+4y: x,y\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{-5}$

b) $\inf\left\{x^2+y^2+2x+6y: x,y\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{-10}$

c) $\inf\left\{x^2+y^2+4x+6y: x,y\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{-13}$

d) $\inf\left\{x^2+y^2+2x+10y: x,y\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{-26}$

6. Podać liczbę rozwiązań danego równania w liczbach zespolonych z.

a) $\overline{z}^{\,7}=z^{19}$, **27**

b) $\overline{z}^{\,5}=z^{17}$, **23**

c) $\overline{z}^{\,2}=z^{11}$, **14**

d) $\overline{z}^{\,3}=z^{13}$, **17**

7. Dla podanej jednej z liczb a, b i c wskazać pozostałe liczby tak, aby wektor (a, b, c) był prostopadły do wektorów $(1, 1, 1)$ i $(1, 2, 3)$.

a) $a=1, \quad b=\mathbf{-2}, \quad c=\mathbf{1}$

b) $b=4, \quad a=\mathbf{-2}, \quad c=\mathbf{-2}$

c) $c=3, \quad a=\mathbf{3}, \quad b=\mathbf{-6}$

d) $b=2, \quad a=\mathbf{-1}, \quad c=\mathbf{-1}$

8. Dla podanej macierzy wskazać takie wartości parametrów p i q, aby rząd macierzy był równy 2.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 11 & 13 & 17 & 19 \\ 13 & 16 & p & q \end{pmatrix}, \quad p=\mathbf{22}, \quad q=\mathbf{26}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 11 & 13 & 17 & 19 \\ 10 & 15 & p & q \end{pmatrix}, \quad p=\mathbf{25}, \quad q=\mathbf{35}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 11 & 13 & 17 & 19 \\ 21 & 24 & p & q \end{pmatrix}, \quad p=\mathbf{31}, \quad q=\mathbf{34}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 6 & p & q \end{pmatrix}, \quad p=\mathbf{18}, \quad q=\mathbf{40}$

9. Zbiorem elementów grupy jest przedział $(1, \infty)$, a działanie grupowe "$\circ$" jest określone wzorem $a \circ b = a^{\log_4 b}$. Dla podanego elementu g tej grupy podać element do niego odwrotny.

a) $g=16, \quad g^{-1}=\mathbf{2}$

b) $g=4, \quad g^{-1}=\mathbf{4}$

c) $g=2, \quad g^{-1}=\mathbf{16}$

d) $g=8, \quad g^{-1}=\sqrt[3]{\mathbf{16}}=\mathbf{2}\cdot\sqrt[3]{\mathbf{2}}$

10. Niech $C(n,m)$ będzie liczbą ideałów w pierścieniu $\mathbb{Z}$ zawierających liczbę n i niezawierających liczby m. Wówczas

a) $C(64,48) = \mathbf{2}$ **b)** $C(64,6) = \mathbf{5}$

c) $C(64,2) = \mathbf{5}$ **d)** $C(64,3) = \mathbf{6}$

11. Rzucamy trzy razy kostką do gry, która na ściankach ma 1, 2, 3, 4, 5, 7 oczek – zamiast szóstki jest siódemka. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że suma liczb oczek wyrzuconych w poszczególnych rzutach jest równa n. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(17) = \mathbf{1/36}$ **b)** $P(21) = \mathbf{1/216}$

c) $P(19) = \mathbf{1/72}$ **d)** $P(18) = \mathbf{1/72}$

12. W urnie znajduje się b kul białych i c kul czarnych. Losujemy z urny dwie kule (losowanie bez zwracania). Niech $P(b,c)$ będzie prawdopodobieństwem, że wylosowane kule mają różne kolory. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(3,3) = \mathbf{3/5}$ **b)** $P(3,4) = \mathbf{4/7}$

c) $P(4,4) = \mathbf{4/7}$ **d)** $P(2,3) = \mathbf{3/5}$

1. Podać wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{6n}\frac{n}{k^2+36n^2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{24}}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{4n}\frac{n}{k^2+16n^2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{16}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{k^2+n^2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{10n}\frac{n}{k^2+100n^2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{40}}$

2. Podać zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int\limits_0^\infty\frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{14}+x^7}}\,dx$, $(\mathbf{5},\mathbf{6})$ b) $\int\limits_0^\infty\frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{20}+x^8}}\,dx$, $(\mathbf{6},\mathbf{9})$

c) $\int\limits_0^\infty\frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{32}+x^{10}}}\,dx$, $(\mathbf{8},\mathbf{15})$ d) $\int\limits_0^\infty\frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{26}+x^9}}\,dx$, $(\mathbf{7},\mathbf{12})$

3. Podać promień zbieżności szeregu potęgowego.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{4n}{n}\cdot n!\cdot x^n}{n^n}$, $R=\mathbf{27e/256}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}\cdot n!\cdot x^{2n}}{n^n}$, $R=\boldsymbol{\sqrt{e}/2}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}\cdot n!\cdot x^n}{n^n}$, $R=\mathbf{e/4}$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{3n}{n}\cdot n!\cdot x^n}{n^n}$, $R=\mathbf{4e/27}$

4. Podać kres górny zbioru.

a) $\sup\left\{\frac{1}{x^{20}+10x^{10}+57}: x\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{1/57}$

b) $\sup\left\{\frac{1}{x^{12}-10x^{6}+47}: x\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{1/22}$

c) $\sup\left\{\frac{1}{x^{8}+10x^{4}+37}: x\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{1/37}$

d) $\sup\left\{\frac{1}{x^{6}+10x^{3}+27}: x\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{1/2}$

5. Podać kres dolny zbioru.

a) $\inf\left\{x^2+y^2+2x+10y: x,y\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{-26}$

b) $\inf\left\{x^2+y^2+2x+6y: x,y\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{-10}$

c) $\inf\left\{x^2+y^2+4x+6y: x,y\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{-13}$

d) $\inf\left\{x^2+y^2+2x+4y: x,y\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{-5}$

6. Podać liczbę rozwiązań danego równania w liczbach zespolonych z.

a) $\overline{z}^5 = z^{17}$, **23**

b) $\overline{z}^3 = z^{13}$, **17**

c) $\overline{z}^7 = z^{19}$, **27**

d) $\overline{z}^2 = z^{11}$, **14**

7. Dla podanej jednej z liczb a, b i c wskazać pozostałe liczby tak, aby wektor (a, b, c) był prostopadły do wektorów $(1, 1, 1)$ i $(1, 2, 3)$.

a) $a=1$, $b=\mathbf{-2}$, $c=\mathbf{1}$

b) $b=4$, $a=\mathbf{-2}$, $c=\mathbf{-2}$

c) $b=2$, $a=\mathbf{-1}$, $c=\mathbf{-1}$

d) $c=3$, $a=\mathbf{3}$, $b=\mathbf{-6}$

8. Dla podanej macierzy wskazać takie wartości parametrów p i q, aby rząd macierzy był równy 2.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 6 & p & q \end{pmatrix}$, $p=\mathbf{18}$, $q=\mathbf{40}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 11 & 13 & 17 & 19 \\ 10 & 15 & p & q \end{pmatrix}$, $p=\mathbf{25}$, $q=\mathbf{35}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 11 & 13 & 17 & 19 \\ 21 & 24 & p & q \end{pmatrix}$, $p=\mathbf{31}$, $q=\mathbf{34}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 11 & 13 & 17 & 19 \\ 13 & 16 & p & q \end{pmatrix}$, $p=\mathbf{22}$, $q=\mathbf{26}$

9. Zbiorem elementów grupy jest przedział $(1, \infty)$, a działanie grupowe "$\circ$" jest określone wzorem $a \circ b = a^{\log_4 b}$. Dla podanego elementu g tej grupy podać element do niego odwrotny.

a) $g=4$, $g^{-1}=\mathbf{4}$

b) $g=8$, $g^{-1}=\sqrt[3]{\mathbf{16}}=\mathbf{2}\cdot\sqrt[3]{\mathbf{2}}$

c) $g=2$, $g^{-1}=\mathbf{16}$

d) $g=16$, $g^{-1}=\mathbf{2}$

10. Niech $C(n,m)$ będzie liczbą ideałów w pierścieniu $\mathbb{Z}$ zawierających liczbę n i niezawierających liczby m. Wówczas

a) $C(64,3) = \mathbf{6}$ **b)** $C(64,48) = \mathbf{2}$

c) $C(64,6) = \mathbf{5}$ **d)** $C(64,2) = \mathbf{5}$

11. Rzucamy trzy razy kostką do gry, która na ściankach ma 1, 2, 3, 4, 5, 7 oczek – zamiast szóstki jest siódemka. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że suma liczb oczek wyrzuconych w poszczególnych rzutach jest równa n. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(18) = \mathbf{1/72}$ **b)** $P(17) = \mathbf{1/36}$

c) $P(19) = \mathbf{1/72}$ **d)** $P(21) = \mathbf{1/216}$

12. W urnie znajduje się b kul białych i c kul czarnych. Losujemy z urny dwie kule (losowanie bez zwracania). Niech $P(b,c)$ będzie prawdopodobieństwem, że wylosowane kule mają różne kolory. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(3,3) = \mathbf{3/5}$ **b)** $P(3,4) = \mathbf{4/7}$

c) $P(2,3) = \mathbf{3/5}$ **d)** $P(4,4) = \mathbf{4/7}$

1. Podać wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{6n}\frac{n}{k^2+36n^2}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{24}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{k^2+n^2}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{10n}\frac{n}{k^2+100n^2}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{40}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{4n}\frac{n}{k^2+16n^2}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{16}}$

2. Podać zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{32}+x^{10}}}\,dx$, $(\mathbf{8,15})$

b) $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{20}+x^{8}}}\,dx$, $(\mathbf{6,9})$

c) $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{14}+x^{7}}}\,dx$, $(\mathbf{5,6})$

d) $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{26}+x^{9}}}\,dx$, $(\mathbf{7,12})$

3. Podać promień zbieżności szeregu potęgowego.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}\cdot n!\cdot x^n}{n^n}$, $R=\mathbf{e/4}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}\cdot n!\cdot x^{2n}}{n^n}$, $R=\sqrt{\mathbf{e}}/\mathbf{2}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{4n}{n}\cdot n!\cdot x^n}{n^n}$, $R=\mathbf{27e/256}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{3n}{n}\cdot n!\cdot x^n}{n^n}$, $R=\mathbf{4e/27}$

4. Podać kres górny zbioru.

a) $\sup\left\{\frac{1}{x^{20}+10x^{10}+57} : x\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{1/57}$

b) $\sup\left\{\frac{1}{x^{8}+10x^{4}+37} : x\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{1/37}$

c) $\sup\left\{\frac{1}{x^{12}-10x^{6}+47} : x\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{1/22}$

d) $\sup\left\{\frac{1}{x^{6}+10x^{3}+27} : x\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{1/2}$

5. Podać kres dolny zbioru.

a) $\inf\left\{x^2+y^2+4x+6y : x,y\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{-13}$

b) $\inf\left\{x^2+y^2+2x+4y : x,y\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{-5}$

c) $\inf\left\{x^2+y^2+2x+10y : x,y\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{-26}$

d) $\inf\left\{x^2+y^2+2x+6y : x,y\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{-10}$

6. Podać liczbę rozwiązań danego równania w liczbach zespolonych z.

a) $\overline{z}^{5}=z^{17}$, **23**

b) $\overline{z}^{3}=z^{13}$, **17**

c) $\overline{z}^{7}=z^{19}$, **27**

d) $\overline{z}^{2}=z^{11}$, **14**

7. Dla podanej jednej z liczb a, b i c wskazać pozostałe liczby tak, aby wektor (a, b, c) był prostopadły do wektorów $(1, 1, 1)$ i $(1, 2, 3)$.

a) $b=4, \quad a=\mathbf{-2}, \quad c=\mathbf{-2}$

b) $b=2, \quad a=\mathbf{-1}, \quad c=\mathbf{-1}$

c) $a=1, \quad b=\mathbf{-2}, \quad c=\mathbf{1}$

d) $c=3, \quad a=\mathbf{3}, \quad b=\mathbf{-6}$

8. Dla podanej macierzy wskazać takie wartości parametrów p i q, aby rząd macierzy był równy 2.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 11 & 13 & 17 & 19 \\ 13 & 16 & p & q \end{pmatrix}, \quad p=\mathbf{22}, \quad q=\mathbf{26}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 11 & 13 & 17 & 19 \\ 10 & 15 & p & q \end{pmatrix}, \quad p=\mathbf{25}, \quad q=\mathbf{35}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 11 & 13 & 17 & 19 \\ 21 & 24 & p & q \end{pmatrix}, \quad p=\mathbf{31}, \quad q=\mathbf{34}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 6 & p & q \end{pmatrix}, \quad p=\mathbf{18}, \quad q=\mathbf{40}$

9. Zbiorem elementów grupy jest przedział $(1, \infty)$, a działanie grupowe "$\circ$" jest określone wzorem $a \circ b = a^{\log_4 b}$. Dla podanego elementu g tej grupy podać element do niego odwrotny.

a) $g=4, \quad g^{-1}=\mathbf{4}$

b) $g=16, \quad g^{-1}=\mathbf{2}$

c) $g=2, \quad g^{-1}=\mathbf{16}$

d) $g=8, \quad g^{-1}=\sqrt[3]{\mathbf{16}}=\mathbf{2}\cdot\sqrt[3]{\mathbf{2}}$

10. Niech $C(n,m)$ będzie liczbą ideałów w pierścieniu $\mathbb{Z}$ zawierających liczbę n i niezawierających liczby m. Wówczas

a) $C(64,2)=\mathbf{5}$ **b)** $C(64,48)=\mathbf{2}$

c) $C(64,6)=\mathbf{5}$ **d)** $C(64,3)=\mathbf{6}$

11. Rzucamy trzy razy kostką do gry, która na ściankach ma 1, 2, 3, 4, 5, 7 oczek – zamiast szóstki jest siódemka. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że suma liczb oczek wyrzuconych w poszczególnych rzutach jest równa n. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(17)=\mathbf{1/36}$ **b)** $P(19)=\mathbf{1/72}$

c) $P(21)=\mathbf{1/216}$ **d)** $P(18)=\mathbf{1/72}$

12. W urnie znajduje się b kul białych i c kul czarnych. Losujemy z urny dwie kule (losowanie bez zwracania). Niech $P(b,c)$ będzie prawdopodobieństwem, że wylosowane kule mają różne kolory. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(3,4)=\mathbf{4/7}$ **b)** $P(4,4)=\mathbf{4/7}$

c) $P(2,3)=\mathbf{3/5}$ **d)** $P(3,3)=\mathbf{3/5}$

1. Podać wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{k^2+n^2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{10n}\frac{n}{k^2+100n^2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{40}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{4n}\frac{n}{k^2+16n^2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{16}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{6n}\frac{n}{k^2+36n^2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{24}}$

2. Podać zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{32}+x^{10}}}\,dx$, $(\mathbf{8},\mathbf{15})$

b) $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{14}+x^{7}}}\,dx$, $(\mathbf{5},\mathbf{6})$

c) $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{26}+x^{9}}}\,dx$, $(\mathbf{7},\mathbf{12})$

d) $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{20}+x^{8}}}\,dx$, $(\mathbf{6},\mathbf{9})$

3. Podać promień zbieżności szeregu potęgowego.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{4n}{n}\cdot n!\cdot x^n}{n^n}$, $R=\mathbf{27e/256}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}\cdot n!\cdot x^{2n}}{n^n}$, $R=\boldsymbol{\sqrt{e}/2}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{3n}{n}\cdot n!\cdot x^n}{n^n}$, $R=\mathbf{4e/27}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}\cdot n!\cdot x^n}{n^n}$, $R=\mathbf{e/4}$

4. Podać kres górny zbioru.

a) $\sup\left\{\frac{1}{x^{20}+10x^{10}+57} : x\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{1/57}$

b) $\sup\left\{\frac{1}{x^{12}-10x^{6}+47} : x\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{1/22}$

c) $\sup\left\{\frac{1}{x^{6}+10x^{3}+27} : x\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{1/2}$

d) $\sup\left\{\frac{1}{x^{8}+10x^{4}+37} : x\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{1/37}$

5. Podać kres dolny zbioru.

a) $\inf\left\{x^2+y^2+4x+6y : x,y\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{-13}$

b) $\inf\left\{x^2+y^2+2x+4y : x,y\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{-5}$

c) $\inf\left\{x^2+y^2+2x+6y : x,y\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{-10}$

d) $\inf\left\{x^2+y^2+2x+10y : x,y\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{-26}$

6. Podać liczbę rozwiązań danego równania w liczbach zespolonych z.

a) $\overline{z}^5 = z^{17}$, **23**

b) $\overline{z}^3 = z^{13}$, **17**

c) $\overline{z}^7 = z^{19}$, **27**

d) $\overline{z}^2 = z^{11}$, **14**

7. Dla podanej jednej z liczb a, b i c wskazać pozostałe liczby tak, aby wektor (a,b,c) był prostopadły do wektorów $(1,1,1)$ i $(1,2,3)$.

a) $c=3, \quad a=\mathbf{3}, \quad b=\mathbf{-6}$

b) $b=4, \quad a=\mathbf{-2}, \quad c=\mathbf{-2}$

c) $b=2, \quad a=\mathbf{-1}, \quad c=\mathbf{-1}$

d) $a=1, \quad b=\mathbf{-2}, \quad c=\mathbf{1}$

8. Dla podanej macierzy wskazać takie wartości parametrów p i q, aby rząd macierzy był równy 2.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 11 & 13 & 17 & 19 \\ 13 & 16 & p & q \end{pmatrix}, \quad p=\mathbf{22}, \quad q=\mathbf{26}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 11 & 13 & 17 & 19 \\ 10 & 15 & p & q \end{pmatrix}, \quad p=\mathbf{25}, \quad q=\mathbf{35}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 11 & 13 & 17 & 19 \\ 21 & 24 & p & q \end{pmatrix}, \quad p=\mathbf{31}, \quad q=\mathbf{34}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 6 & p & q \end{pmatrix}, \quad p=\mathbf{18}, \quad q=\mathbf{40}$

9. Zbiorem elementów grupy jest przedział $(1,\infty)$, a działanie grupowe "$\circ$" jest określone wzorem $a \circ b = a^{\log_4 b}$. Dla podanego elementu g tej grupy podać element do niego odwrotny.

a) $g=16, \quad g^{-1}=\mathbf{2}$

b) $g=2, \quad g^{-1}=\mathbf{16}$

c) $g=4, \quad g^{-1}=\mathbf{4}$

d) $g=8, \quad g^{-1}=\sqrt[3]{\mathbf{16}}=\mathbf{2}\cdot\sqrt[3]{\mathbf{2}}$

10. Niech $C(n,m)$ będzie liczbą ideałów w pierścieniu $\mathbb{Z}$ zawierających liczbę n i niezawierających liczby m. Wówczas

a) $C(64,3)=\mathbf{6}$ **b)** $C(64,2)=\mathbf{5}$

c) $C(64,48)=\mathbf{2}$ **d)** $C(64,6)=\mathbf{5}$

11. Rzucamy trzy razy kostką do gry, która na ściankach ma 1, 2, 3, 4, 5, 7 oczek – zamiast szóstki jest siódemka. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że suma liczb oczek wyrzuconych w poszczególnych rzutach jest równa n. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(17)=\mathbf{1/36}$ **b)** $P(18)=\mathbf{1/72}$

c) $P(21)=\mathbf{1/216}$ **d)** $P(19)=\mathbf{1/72}$

12. W urnie znajduje się b kul białych i c kul czarnych. Losujemy z urny dwie kule (losowanie bez zwracania). Niech $P(b,c)$ będzie prawdopodobieństwem, że wylosowane kule mają różne kolory. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(4,4)=\mathbf{4/7}$ **b)** $P(3,4)=\mathbf{4/7}$

c) $P(3,3)=\mathbf{3/5}$ **d)** $P(2,3)=\mathbf{3/5}$

1. Podać wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{4n}\frac{n}{k^2+16n^2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{16}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{k^2+n^2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{6n}\frac{n}{k^2+36n^2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{24}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{10n}\frac{n}{k^2+100n^2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{40}}$

2. Podać zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{20}+x^8}}\,dx$, $(\mathbf{6},\mathbf{9})$

b) $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{26}+x^9}}\,dx$, $(\mathbf{7},\mathbf{12})$

c) $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{14}+x^7}}\,dx$, $(\mathbf{5},\mathbf{6})$

d) $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{32}+x^{10}}}\,dx$, $(\mathbf{8},\mathbf{15})$

3. Podać promień zbieżności szeregu potęgowego.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{3n}{n}\cdot n!\cdot x^n}{n^n}$, $R=\mathbf{4e/27}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}\cdot n!\cdot x^{2n}}{n^n}$, $R=\mathbf{\sqrt{e}/2}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{4n}{n}\cdot n!\cdot x^n}{n^n}$, $R=\mathbf{27e/256}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}\cdot n!\cdot x^n}{n^n}$, $R=\mathbf{e/4}$

4. Podać kres górny zbioru.

a) $\sup\left\{\frac{1}{x^8+10x^4+37}: x\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{1/37}$

b) $\sup\left\{\frac{1}{x^{12}-10x^6+47}: x\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{1/22}$

c) $\sup\left\{\frac{1}{x^{20}+10x^{10}+57}: x\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{1/57}$

d) $\sup\left\{\frac{1}{x^6+10x^3+27}: x\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{1/2}$

5. Podać kres dolny zbioru.

a) $\inf\left\{x^2+y^2+2x+6y: x,y\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{-10}$

b) $\inf\left\{x^2+y^2+2x+10y: x,y\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{-26}$

c) $\inf\left\{x^2+y^2+2x+4y: x,y\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{-5}$

d) $\inf\left\{x^2+y^2+4x+6y: x,y\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{-13}$

6. Podać liczbę rozwiązań danego równania w liczbach zespolonych z.

a) $\overline{z}^3 = z^{13}$, **17**

b) $\overline{z}^5 = z^{17}$, **23**

c) $\overline{z}^7 = z^{19}$, **27**

d) $\overline{z}^2 = z^{11}$, **14**

7. Dla podanej jednej z liczb a, b i c wskazać pozostałe liczby tak, aby wektor (a,b,c) był prostopadły do wektorów $(1,1,1)$ i $(1,2,3)$.

a) $a=1$, $b=\mathbf{-2}$, $c=\mathbf{1}$

b) $c=3$, $a=\mathbf{3}$, $b=\mathbf{-6}$

c) $b=2$, $a=\mathbf{-1}$, $c=\mathbf{-1}$

d) $b=4$, $a=\mathbf{-2}$, $c=\mathbf{-2}$

8. Dla podanej macierzy wskazać takie wartości parametrów p i q, aby rząd macierzy był równy 2.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 11 & 13 & 17 & 19 \\ 21 & 24 & p & q \end{pmatrix}$, $p=\mathbf{31}$, $q=\mathbf{34}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 6 & p & q \end{pmatrix}$, $p=\mathbf{18}$, $q=\mathbf{40}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 11 & 13 & 17 & 19 \\ 10 & 15 & p & q \end{pmatrix}$, $p=\mathbf{25}$, $q=\mathbf{35}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 11 & 13 & 17 & 19 \\ 13 & 16 & p & q \end{pmatrix}$, $p=\mathbf{22}$, $q=\mathbf{26}$

9. Zbiorem elementów grupy jest przedział $(1,\infty)$, a działanie grupowe "$\circ$" jest określone wzorem $a\circ b=a^{\log_4 b}$. Dla podanego elementu g tej grupy podać element do niego odwrotny.

a) $g=2$, $g^{-1}=\mathbf{16}$

b) $g=8$, $g^{-1}=\sqrt[3]{\mathbf{16}}=\mathbf{2}\cdot\sqrt[3]{\mathbf{2}}$

c) $g=4$, $g^{-1}=\mathbf{4}$

d) $g=16$, $g^{-1}=\mathbf{2}$

10. Niech $C(n,m)$ będzie liczbą ideałów w pierścieniu $\mathbb{Z}$ zawierających liczbę n i niezawierających liczby m. Wówczas

a) $C(64,3) = \mathbf{6}$

b) $C(64,2) = \mathbf{5}$

c) $C(64,48) = \mathbf{2}$

d) $C(64,6) = \mathbf{5}$

11. Rzucamy trzy razy kostką do gry, która na ściankach ma 1, 2, 3, 4, 5, 7 oczek – zamiast szóstki jest siódemka. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że suma liczb oczek wyrzuconych w poszczególnych rzutach jest równa n. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(18) = \mathbf{1/72}$

b) $P(17) = \mathbf{1/36}$

c) $P(21) = \mathbf{1/216}$

d) $P(19) = \mathbf{1/72}$

12. W urnie znajduje się b kul białych i c kul czarnych. Losujemy z urny dwie kule (losowanie bez zwracania). Niech $P(b,c)$ będzie prawdopodobieństwem, że wylosowane kule mają różne kolory. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(2,3) = \mathbf{3/5}$

b) $P(3,4) = \mathbf{4/7}$

c) $P(4,4) = \mathbf{4/7}$

d) $P(3,3) = \mathbf{3/5}$

1. Podać wartość granicy.

a) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{10n}\frac{n}{k^2+100n^2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{40}}$

b) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{6n}\frac{n}{k^2+36n^2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{24}}$

c) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k^2+n^2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$

d) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{4n}\frac{n}{k^2+16n^2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{16}}$

2. Podać zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{26}+x^9}}\,dx$, $(\mathbf{7},\mathbf{12})$

b) $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{14}+x^7}}\,dx$, $(\mathbf{5},\mathbf{6})$

c) $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{32}+x^{10}}}\,dx$, $(\mathbf{8},\mathbf{15})$

d) $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{20}+x^8}}\,dx$, $(\mathbf{6},\mathbf{9})$

3. Podać promień zbieżności szeregu potęgowego.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{4n}{n}\cdot n!\cdot x^n}{n^n}$, $R=\mathbf{27e/256}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}\cdot n!\cdot x^n}{n^n}$, $R=\mathbf{e/4}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{3n}{n}\cdot n!\cdot x^n}{n^n}$, $R=\mathbf{4e/27}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}\cdot n!\cdot x^{2n}}{n^n}$, $R=\boldsymbol{\sqrt{e}/2}$

4. Podać kres górny zbioru.

a) $\sup\left\{\frac{1}{x^{12}-10x^6+47} : x\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{1/22}$

b) $\sup\left\{\frac{1}{x^{6}+10x^3+27} : x\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{1/2}$

c) $\sup\left\{\frac{1}{x^{20}+10x^{10}+57} : x\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{1/57}$

d) $\sup\left\{\frac{1}{x^{8}+10x^4+37} : x\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{1/37}$

5. Podać kres dolny zbioru.

a) $\inf\left\{x^2+y^2+4x+6y : x,y\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{-13}$

b) $\inf\left\{x^2+y^2+2x+6y : x,y\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{-10}$

c) $\inf\left\{x^2+y^2+2x+4y : x,y\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{-5}$

d) $\inf\left\{x^2+y^2+2x+10y : x,y\in\mathbb{R}\right\} = \mathbf{-26}$

6. Podać liczbę rozwiązań danego równania w liczbach zespolonych z.

a) $\overline{z}^2 = z^{11}$, **14**

b) $\overline{z}^7 = z^{19}$, **27**

c) $\overline{z}^5 = z^{17}$, **23**

d) $\overline{z}^3 = z^{13}$, **17**

7. Dla podanej jednej z liczb a, b i c wskazać pozostałe liczby tak, aby wektor (a, b, c) był prostopadły do wektorów $(1, 1, 1)$ i $(1, 2, 3)$.

a) $b = 2, \quad a = \mathbf{-1}, \quad c = \mathbf{-1}$

b) $b = 4, \quad a = \mathbf{-2}, \quad c = \mathbf{-2}$

c) $c = 3, \quad a = \mathbf{3}, \quad b = \mathbf{-6}$

d) $a = 1, \quad b = \mathbf{-2}, \quad c = \mathbf{1}$

8. Dla podanej macierzy wskazać takie wartości parametrów p i q, aby rząd macierzy był równy 2.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 11 & 13 & 17 & 19 \\ 21 & 24 & p & q \end{pmatrix}, \quad p = \mathbf{31}, \quad q = \mathbf{34}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 11 & 13 & 17 & 19 \\ 13 & 16 & p & q \end{pmatrix}, \quad p = \mathbf{22}, \quad q = \mathbf{26}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 6 & p & q \end{pmatrix}, \quad p = \mathbf{18}, \quad q = \mathbf{40}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 11 & 13 & 17 & 19 \\ 10 & 15 & p & q \end{pmatrix}, \quad p = \mathbf{25}, \quad q = \mathbf{35}$

9. Zbiorem elementów grupy jest przedział $(1, \infty)$, a działanie grupowe "$\circ$" jest określone wzorem $a \circ b = a^{\log_4 b}$. Dla podanego elementu g tej grupy podać element do niego odwrotny.

a) $g = 4, \quad g^{-1} = \mathbf{4}$

b) $g = 16, \quad g^{-1} = \mathbf{2}$

c) $g = 8, \quad g^{-1} = \sqrt[3]{\mathbf{16}} = \mathbf{2} \cdot \sqrt[3]{\mathbf{2}}$

d) $g = 2, \quad g^{-1} = \mathbf{16}$

10. Niech $C(n,m)$ będzie liczbą ideałów w pierścieniu $\mathbb{Z}$ zawierających liczbę n i niezawierających liczby m. Wówczas

a) $C(64,2) = \mathbf{5}$ **b)** $C(64,48) = \mathbf{2}$

c) $C(64,3) = \mathbf{6}$ **d)** $C(64,6) = \mathbf{5}$

11. Rzucamy trzy razy kostką do gry, która na ściankach ma 1, 2, 3, 4, 5, 7 oczek – zamiast szóstki jest siódemka. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że suma liczb oczek wyrzuconych w poszczególnych rzutach jest równa n. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(18) = \mathbf{1/72}$ **b)** $P(21) = \mathbf{1/216}$

c) $P(17) = \mathbf{1/36}$ **d)** $P(19) = \mathbf{1/72}$

12. W urnie znajduje się b kul białych i c kul czarnych. Losujemy z urny dwie kule (losowanie bez zwracania). Niech $P(b,c)$ będzie prawdopodobieństwem, że wylosowane kule mają różne kolory. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(4,4) = \mathbf{4/7}$ **b)** $P(2,3) = \mathbf{3/5}$

c) $P(3,3) = \mathbf{3/5}$ **d)** $P(3,4) = \mathbf{4/7}$