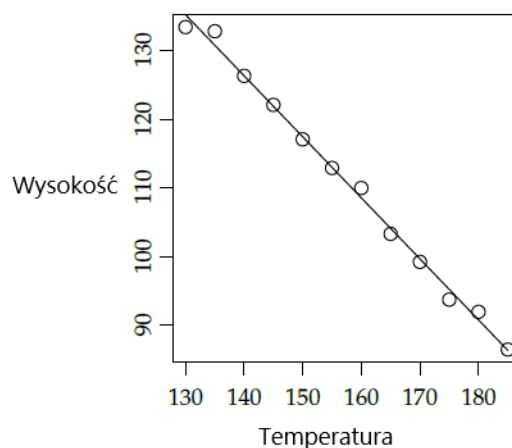


EGZAMIN MAGISTERSKI, 26.06.2024 r.
Matematyka w ekonomii

Zadanie **1.** (8 punktów)

W eksperymencie mającym na celu określenie zależności pomiędzy temperaturą pieczenia a wysokością biszkoptu zmierzono wysokość biszkoptu przy $n = 12$ temperaturach w zakresie $130 - 185^{\circ}\text{C}$. Na rysunku przedstawiono wykres na podstawie otrzymanych wyników.



- (a) Na podstawie tego rysunku określ, który z poniższych zestawów oszacowań parametrów standardowego modelu regresji liniowej jest poprawny i uzasadnij swój wybór.

- (i) $\hat{\beta}_0 = 0$, $\hat{\beta}_1 = -0,9$, $\hat{\sigma}_0 = 36$,
- (ii) $\hat{\beta}_0 = 0$, $\hat{\beta}_1 = 0,9$, $\hat{\sigma}_0 = 3,6$,
- (iii) $\hat{\beta}_0 = 252$, $\hat{\beta}_1 = -0,9$, $\hat{\sigma}_0 = 3,6$,
- (iv) $\hat{\beta}_0 = -252$, $\hat{\beta}_1 = -0,9$, $\hat{\sigma}_0 = 36$,
- (v) $\hat{\beta}_0 = 252$, $\hat{\beta}_1 = -0,9$, $\hat{\sigma}_0 = 36$.

- (b) Określ, które z poniższych stwierdzeń jest poprawne i uzasadnij swój wybór.

- (i) Proporcja wyjaśnionej zmienności wynosi 50%, a korelacja 0,98.

- (ii) Proporcja wyjaśnionej zmienności wynosi 0%, a korelacja -0,98.
- (iii) Proporcja wyjaśnionej zmienności wynosi 96%, a korelacja -1.
- (iv) Proporcja wyjaśnionej zmienności wynosi 96%, a korelacja 0,98.
- (v) Proporcja wyjaśnionej zmienności wynosi 96%, a korelacja -0,98.

Zadanie 2. (8 punktów)

Niech $X_1, \dots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $N(0, \theta)$, gdzie $\theta = EX_1^2$. Wyznacz estymator największej wiarygodności parametru θ . Czy uzyskany estymator jest estymatorem nieobciążonym o minimalnej wariancji? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 3. (8 punktów)

Rozpatrzmy proces stochastyczny $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ zdefiniowany rekurencyjnie

$$X_t + 0,81X_{t-2} = W_t + \frac{1}{3}W_{t-1},$$

gdzie $\{W_t\}$ jest to ciąg i.i.d zmiennych losowych o rozkładzie $N(0, 1)$.

- (i) Określ jakiego typu szeregiem czasowy jest powyżej zdefiniowany proces stochastyczny?
- (ii) Czy jest to proces wynikowy?
- (ii) Czy jest to proces odwracalny?

Zadanie 4. (8 punktów)

Niech (X, Y, Z) ma trójwymiarowy łączny rozkład normalny z średnią $\mathbf{m} = (0, 0, 0)$ oraz macierzą kowariancji

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Niech $W = X + Y + Z$.

- (i) Jaki rozkład ma W . Ile wynosi $\mathbb{P}(W > 0)$? Uzasadnij!
- (ii) Korzystając z załączonej poniżej tabelki oszacować $\mathbb{P}(W > 3.84)$.
Wsk. Zanim przystąpisz do obliczeń, zastanów się nad strukturą (X, Y, Z) .

Tabela 1: Kwantyle z_p rzędu p standardowego rozkładu normalnego.

p	0.90	0.95	0.975	0.990	0.995
z_p	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

EGZAMIN MAGISTERSKI, 26.06.2024 r.
Nauczycielska

Zadanie **1. (8 punktów)**

Rozważmy przestrzeń metryczną (X, d) . Przypomnijmy, że brzegiem zbioru A nazywamy zbiór $Bd(A) = \overline{A} \setminus Int(A)$.

- a) Pokaż, że dla każdego $A \subseteq X$ brzeg A jest zbiorem domkniętym.
- b) Pokaż, że dla każdego $A \subseteq X$ mamy $Bd(A) = Bd(X \setminus A)$ (Wskazówka: najpierw zastanów się, jak się ma $\overline{A}$ do $Int(X \setminus A)$).
- c) Podaj przykład zbioru $A \subseteq \mathbb{R}^2$, którego brzeg ma niepuste wnętrze.
- d) Pokaż, że jeżeli U jest zbiorem otwartym, to brzeg U ma puste wnętrze.

W podpunkcie c) rozpatrujemy $\mathbb{R}^2$ z metryką euklidesową.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Udowodnij, że jeśli n jest nieparzystą liczbą naturalną to liczba

$$5^n + 7^n$$

dzieli się przez 11.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Dany jest kwadrat o boku a . Chcemy podzielić ten kwadrat prostą równoległą do jednej z jego przekątnych na dwie części, których stosunek pól wynosi 1:2.

1. Uzasadnij, że konstrukcja powyższego podziału jest wykonalna za pomocą cyrkla i linijki.
2. Opisz (szkicowo) etapy tej konstrukcji.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ definiujemy relację „ $\preceq$ ” w następujący sposób:

$$(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2,$$

dla $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

a) Uzasadnij, że „ $\preceq$ ” jest porządkiem częściowym na $\mathbb{R}^2$.

b) Dla zbioru

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

opisz elementy minimalne i maksymalne w A . Czy A ma kres dolny? Czy A ma kres górny?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 26.06.2024 r.
Matematyka stosowana

Zadanie **1. (8 punktów)**

Równanie

$$y'' + y = \sin(at)$$

opisuje amplitudę drgań $y = y(t)$ wzbudzanych okresowo funkcją $\sin(at)$. Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbf{R}$ drgania te są ograniczone, a dla jakich wartości są nieograniczone.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Funkcja $u(t, x)$ opisuje rozkład temperatury w metalowym pręcie, długości 1 metra (przyjmujemy, że pręt jest jednowymiarowy). Równanie opisujące ewolucję temperatury, to równanie ciepła:

$$u_t = u_{xx}.$$

Zaproponuj warunki brzegowe opisujące brak przepływu przez brzeg. Znajdź rozwiązanie tego zagadnienia. Do czego będzie dążyło rozwiązanie przy czasie t dążącym do $+\infty$?

Zadanie **3. (8 punktów)**

Założmy, że imigranci przybywają na wyspę *Roke* zgodnie z procesem Poissona z intensywnością wynoszącą dziesięciu imigrantów tygodniowo. Wiadomo, że każdy imigrant, niezależnie od pozostałych, jest czarnoksiężnikiem z prawdopodobieństwem $\frac{1}{12}$.

Jakie jest prawdopodobieństwo, że w ciągu roku 2025 żaden czarnoksiężnik nie wyemigruje na wyspę *Roke* w miesiącu lutym?

Zadanie **4. (8 punktów)**

Niech (X, Y, Z) ma trójwymiarowy łączny rozkład normalny z średnią $\mathbf{m} = (0, 0, 0)$ oraz macierzą kowariancji

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Niech $W = X + Y + Z$.

- (i) Jaki rozkład ma W . Ile wynosi $\mathbb{P}(W > 0)$? Uzasadnij!
- (ii) Korzystając z załączonej poniżej tabelki oszacować $\mathbb{P}(W > 3.84)$.

Tabela 2: Kwantyle z_p rzędu p standardowego rozkładu normalnego.

p	0.90	0.95	0.975	0.990	0.995
z_p	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

Wsk. Zanim przystąpisz do obliczeń, zastanów się nad strukturą (X, Y, Z) .

EGZAMIN MAGISTERSKI, 26.06.2024 r.
Matematyka teoretyczna

Zadanie **1. (8 punktów)**

Rozważmy przestrzeń metryczną (X, d) . Przypomnijmy, że brzegiem zbioru A nazywamy zbiór $Bd(A) = \overline{A} \setminus Int(A)$.

- a) Pokaż, że dla każdego $A \subseteq X$ brzeg A jest zbiorem domkniętym.
- b) Pokaż, że dla każdego $A \subseteq X$ mamy $Bd(A) = Bd(X \setminus A)$ (Wskazówka: najpierw zastanów się, jak się ma $\overline{A}$ do $Int(X \setminus A)$).
- c) Podaj przykład zbioru $A \subseteq \mathbb{R}^2$, którego brzeg ma niepuste wnętrze.
- d) Pokaż, że jeżeli U jest zbiorem otwartym, to brzeg U ma puste wnętrze.

W podpunkcie c) rozpatrujemy $\mathbb{R}^2$ z metryką euklidesową.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Wyznaczyć wszystkie (z dokładnością do izomorfizmu) grupy generowane przez elementy g i h , dla których zachodzą równości $g^5 = h^2 = e$ oraz $hg = g^n h$ dla pewnego $n \in \{1, 2, 3, 4\}$. Odpowiedź uzasadnić, przy czym nie można korzystać z klasyfikacji grup rzędu 10.

Zadanie **4. (8 punktów)**

W chińskiej restauracji jest nieskończenie wiele stolików, a każdy z nich może pomieścić nieskończenie wiele osób.

- W czasie $n = 1$ do restauracji przychodzi pierwszy klient i siada przy pierwszym stoliku.
- W czasie $n = 2$ przychodzi drugi klient i z prawdopodobieństwem $1/2$ siada przy pierwszym stoliku lub przy drugim.
- Klient przychodzący w czasie n z prawdopodobieństwem $1/n$ wybiera pierwszy pusty stół lub siada przy jednym z zajętych już stolików z prawdopodobieństwem proporcjonalnym do liczby siedzących przy nim osób.

Oznaczmy przez X_n liczbę zajętych stolików w czasie n .

1. Uzasadnij, że

$$X_n \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^n Y_k,$$

gdzie $\{Y_k\}_{k=1}^n$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że

$$\mathbb{P}[Y_k = 1] = 1/k = 1 - \mathbb{P}[Y_k = 0]$$

2. Oblicz $\mathbb{E}X_n$ oraz $\text{Var}X_n$.
3. Oblicz funkcję charakterystyczną Y_n .
4. Udowodnij Centralne Twierdzenie Graniczne:

$$\frac{X_n - \log n}{\sqrt{\log n}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

Zadanie 4. (8 punktów)

Niech $N = \omega^{<\omega}$. Rodzinę $\mathcal{P}(N)$ identyfikujemy z $X = 2^N$ z topologią Cantora. Rozważmy zbiór drzew T , będących poddrzewami N .

- a) Pokaż, że zbiór drzew T jest domkniętym podzbiorem X . Wywnioskuj, że T jest przestrzenią polską.
- b) Czy zbiór tych drzew, które nie zawierają nieskończonego antyłańcucha, jest borelowski? Jeśli tak, to oszacuj miejsce tego zbioru w hierarchii borelowskiej. (Wskazówka: najpierw wykaż, że jeżeli drzewo nie zawiera nieskończonego antyłańcucha, to istnieje n takie, że nie zawiera antyłańcuchów dłuższych niż n .)
- c) Czy zbiór tych drzew, które nie zawierają nieskończonego łańcucha, jest borelowski? Jeśli tak, to oszacuj miejsce tego zbioru w hierarchii borelowskiej.
- d) Czy odpowiedzi na pytania b) i c) zmieniają się, jeżeli $N = 2^{<\omega}$?

Zadanie 4. (8 punktów)

Przestrzeń X powstała z orientowalnej zamkniętej powierzchni rodzaju (genusu) 3 przez usunięcie n punktów. Okazało się, że pierwsza grupa homologii tej przestrzeni to $H_1(X) = \mathbf{Z}^7$. Wyznacz n .

Zadanie 4. (8 punktów)

Założmy, że $a, b \in \mathbb{C}$ są takie, że $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}] = 2$ oraz $[\mathbb{Q}(b) : \mathbb{Q}] = 3$.

1. Czy możliwe jest, że $[\mathbb{Q}(ab) : \mathbb{Q}] = 3$? Odpowiedź uzasadnić (tzn. albo podać przykład z dowodem, albo udowodnić nieistnienie)!
2. Czy możliwe jest, że $[\mathbb{Q}(ab) : \mathbb{Q}] = 2$? Odpowiedź uzasadnić (tzn. albo podać przykład z dowodem, albo udowodnić nieistnienie)!

Zadanie 4. (8 punktów)

Niech $C[0, 1]$ oraz $C^1[0, 1]$ oznaczają odpowiednio: przestrzeń funkcji ciągłych i różniczkowalnych w sposób ciągły na odcinku $[0, 1]$ z normami:

$$\|f\|_{C[0,1]} = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|, \quad \|f\|_{C^1[0,1]} = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| + \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)|.$$

1. Pokazać, że operator $T_1 : C^1[0, 1] \rightarrow C^1[0, 1]$ zadany wzorem $T_1 f(x) = e^x f(x)$ jest ograniczony i znaleźć jego normę.
2. Dla jakich $g \in C^1[0, 1]$ operator $T_2 : C^1[0, 1] \rightarrow C^1[0, 1]$ zadany wzorem $T_2 f(x) = g(x)f(x)$ jest odwracalny?
3. Pokazać, że operator $T_3 : C^1[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ zadany wzorem $T_3 f(x) = f(x)$ jest zwarty.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 26.06.2024 r.
Analiza danych

Zadanie **1.** (8 punktów)

1. Dane są macierz i wektor:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Znajdź

$$\max_{\substack{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{f}^T \mathbf{f} = 1, \\ \mathbf{f}^T \mathbf{g} = 0}} \mathbf{f}^T \mathbf{Z} \mathbf{f} \quad \text{oraz} \quad \arg \max_{\substack{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{f}^T \mathbf{f} = 1, \\ \mathbf{f}^T \mathbf{g} = 0}} \mathbf{f}^T \mathbf{Z} \mathbf{f}.$$

Zadanie **2.** (8 punktów)

Rozważmy próbę o licznosci $N = 5$ z dwuwymiarowego rozkładu normalnego $N_2(\mu, \Sigma)$,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & \tau \\ \tau & 1 \end{pmatrix},$$

gdzie τ jest znanym parametrem. Załóżmy, że $\bar{x}^T = (1, 0)$. Dla jakich wartości parametru τ hipotezę $H_0 : \mu^T = (0, 0)$ należy odrzucić na korzyść alternatywy $H_1 : \mu^T \neq (0, 0)$ na poziomie istotności $\alpha = 0,05$?

Zadanie **3.** (8 punktów)

Niech $X_1, \dots, X_n$ będąca niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $N(0, \theta)$, gdzie $\theta = EX_1^2$. Wyznacz estymator największej wiarygodności parametru θ . Czy uzyskany estymator jest estymatorem nieobciążonym o minimalnej wariancji? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie **4.** (8 punktów)

Niech (X, Y, Z) ma trójwymiarowy łączny rozkład normalny z średnią $\mathbf{m} = (0, 0, 0)$ oraz macierzą kowariancji

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Niech $W = X + Y + Z$.

- (i) Jaki rozkład ma W . Ile wynosi $\mathbb{P}(W > 0)$? Uzasadnij!
- (ii) Korzystając z załączonej poniżej tabelki oszacować $\mathbb{P}(W > 3.84)$.

Tabela 3: Kwantyle z_p rzędu p standardowego rozkładu normalnego.

p	0.90	0.95	0.975	0.990	0.995
z_p	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

Wsk. Zanim przystąpisz do obliczeń, zastanów się nad strukturą (X, Y, Z) .

EGZAMIN MAGISTERSKI, 26.06.2024 r.
Aktuarialno-finansowa

Zadanie **1.** (8 punktów)

Niech $\{X_1(t) = 4B_1(t) + B_2(t), t \geq 0\}$ oraz $\{X_2(t) = B_1(t) + aB_2(t), t \geq 0\}$, gdzie $\{B_1(t) : t \geq 0\}$, $\{B_2(t) : t \geq 0\}$ są wzajemnie niezależnymi standardowymi procesami Wienera określonymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej oraz $a \in \mathbb{R}$.

a) Znaleźć wszystkie takie $a \in \mathbb{R}$ dla których procesy stochastyczne $\{X_1(t) : t \geq 0\}$, $\{X_2(t) : t \geq 0\}$ są wzajemnie niezależne.

b) Dla jakich $b > 0$ proces stochastyczny $\{X_1(bt) : t \geq 0\}$ jest standardowym procesem Wienera?

Odpowiedzi uzasadnić.

Zadanie **2.** (8 punktów)

Niech (X, Y, Z) ma trójwymiarowy łączny rozkład normalny z średnią $\mathbf{m} = (0, 0, 0)$ oraz macierzą kowariancji

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Niech $W = X + Y + Z$.

(i) Jaki rozkład ma W . Ile wynosi $\mathbb{P}(W > 0)$? Uzasadnij!

(ii) Korzystając z załączonej poniżej tabelki oszacować $\mathbb{P}(W > 3.84)$.

Tabela 4: Kwantyle z_p rzędu p standardowego rozkładu normalnego.

p	0.90	0.95	0.975	0.990	0.995
z_p	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

Wsk. Zanim przystąpisz do obliczeń, zastanów się nad strukturą (X, Y, Z) .

Zadanie **3.** (8 punktów)

Przy założeniu hipotezy jednorodnej populacji (HJP) oraz hipotezy jednostajności (HU) oblicz

(i 3pkt) $\mathbb{E}[T_x] - \mathbb{E}[K_x]$,

(ii 5pkt) $\mathbb{V}ar[T_x] - \mathbb{V}ar[K_x]$,

gdzie T_x jest przyszłym czasem życia x -latka natomiast K_x jest obciążonym przyszłym czasem życia x -latka. Odpowiedź krótko uzasadnij.

Zadanie **4.** (8 punktów)

Założmy, że cena spot pewnej akcji niewypłacającej dywidend wynosi 100. Rozważmy model dwumianowy dwuokresowy, z dwoma okresami (krokami) o długości $1/2$ roku każdy, w którym cena tej akcji po każdym kroku może wzrosnąć o 10% lub zmaleć o 10% (tj. przy standardowych oznaczeniach $u = 1.1$, $d = 0.9$). Rozważmy w tym modelu europejski instrument pochodny o następującej funkcji wypłaty:

$$X_T = \begin{cases} 0, & S_T \leq K, \\ S_T - K - A, & K < S_T \end{cases}$$

o zapadalności $T = 1$ (tj. 1 rok) i cenie wykonania $K = 95$. Wyznacz wartość parametru A w taki sposób, aby cena tego instrumentu w chwili 0 wynosiła 0. Załóż stopę wolną od ryzyka $r = 2 \cdot \log(1.05)$ (oprocentowanie ciągłe).