1. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{20n}\frac{n^2}{n^3+k}=$ .... **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{19n}\frac{n^2}{n^3+k}=$ ....

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2n+1}^{18n}\frac{n^2}{n^3+k}=$ .... **d)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=3n+1}^{17n}\frac{n^2}{n^3+k}=$ ....

2. Niech $C(k)=\int\limits_0^{k\pi}\sqrt[k]{\sin^k x}\,dx$. Wówczas

a) $C(5)=$ .... **b)** $C(4)=$ ....

c) $C(3)=$ .... **d)** $C(2)=$ ....

3. Niech $C(k)=\int\limits_1^{2}\frac{dx}{x^2+kx}$. Wówczas

a) $C(2)=$ .... **b)** $C(1)=$ ....

c) $C(4)=$ .... **d)** $C(3)=$ ....

4. Niech $f(x)=x^5\cdot\ln\left(1+x^3\right)$. Podaj wartość pochodnej danego rzędu.

a) $f^{(20)}(0)=$ .... **b)** $f^{(11)}(0)=$ ....

c) $f^{(14)}(0)=$ .... **d)** $f^{(17)}(0)=$ ....

5. Podaj w możliwie prostej postaci takie wyrażenia A, B, C, D, aby dla każdej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

a) $$\int_2^3\int_0^x f(x,y)\,dy\,dx=\int_A^B\int_C^D f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\ldots\ldots\ldots$ $B=\ldots\ldots\ldots$ $C=\ldots\ldots\ldots$ $D=\ldots\ldots\ldots$

b) $$\int_0^4\int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx=\int_A^B\int_C^D f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\ldots\ldots\ldots$ $B=\ldots\ldots\ldots$ $C=\ldots\ldots\ldots$ $D=\ldots\ldots\ldots$

c) $$\int_0^2\int_x^2 f(x,y)\,dy\,dx=\int_A^B\int_C^D f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\ldots\ldots\ldots$ $B=\ldots\ldots\ldots$ $C=\ldots\ldots\ldots$ $D=\ldots\ldots\ldots$

d) $$\int_{-2}^2\int_{2-\sqrt{4-x^2}}^{2+\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx=\int_A^B\int_C^D f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\ldots\ldots\ldots$ $B=\ldots\ldots\ldots$ $C=\ldots\ldots\ldots$ $D=\ldots\ldots\ldots$

6. Dla podanej liczby zespolonej z_0 podaj taką liczbę zespoloną z, aby $|z-i|=|z-1|=|z-z_0|$.

a) $z_0=11$, $z=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ **b)** $z_0=7$, $z=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

c) $z_0=3$, $z=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ **d)** $z_0=5$, $z=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

7. Podaj w postaci ułamka nieskracalnego cosinus kąta między wektorami v_1 i v_2.

a) $v_1=(1,2)$, $v_2=(2,1)$, $\cos(v_1,v_2)=$ ....

b) $v_1=(1,3)$, $v_2=(3,1)$, $\cos(v_1,v_2)=$ ....

c) $v_1=(3,4)$, $v_2=(3,-4)$, $\cos(v_1,v_2)=$ ....

d) $v_1=(3,4)$, $v_2=(4,3)$, $\cos(v_1,v_2)=$ ....

8. Dla podanej macierzy wskaż takie wartości parametrów p i q, aby macierz miała wartości własne 1 i 2.

a) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ p & q \end{pmatrix}$, $p=$ ...., $q=$ ....

b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ p & q \end{pmatrix}$, $p=$ ...., $q=$ ....

c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ p & q \end{pmatrix}$, $p=$ ...., $q=$ ....

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ p & q \end{pmatrix}$, $p=$ ...., $q=$ ....

9. Podaj liczbę elementów rzędu 6 w podanej grupie.

a) $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$, ... **b)** $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$, ...

c) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$, ... **d)** $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$, ...

10. Dla podanych liczb a i b podaj zbiór wszystkich takich liczb naturalnych $n \in [a, b]$, że pierścień $\mathbb{Z}_n$ z dodawaniem i mnożeniem modulo n jest ciałem.

a) $a = 40$, $b = 49$, $n \in \{$ .... $\}$

b) $a = 30$, $b = 39$, $n \in \{$ .... $\}$

c) $a = 10$, $b = 19$, $n \in \{$ .... $\}$

d) $a = 20$, $b = 29$, $n \in \{$ .... $\}$

11. Rzucamy monetą tak długo, aż wypadnie orzeł. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że przed wyrzuceniem orła pojawło się dokładnie n reszek. Podaj w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(4) =$ .... **b)** $P(1) =$ ....

c) $P(2) =$ .... **d)** $P(3) =$ ....

12. Rzucamy kostką do gry. Jeżeli wypadło mniej niż n oczek, unieważniamy pierwszy rzut i rzucamy po raz drugi – w tym wypadku wynik drugiego rzutu jest ostateczny. Niech $E(n)$ będzie wartością oczekiwaną liczby oczek, jaka widnieje na kostce. Podaj w postaci liczby naturalnej lub ułamka nieskracalnego:

a) $E(3) =$ .... **b)** $E(4) =$ ....

c) $E(5) =$ .... **d)** $E(2) =$ ....