EGZAMIN LICENCJACKI (zadania otwarte)
19 lutego 2024 r.

Zadanie **1.** Wyznaczyć **przedział** zbieżności szeregu potęgowego
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n\cdot x^n\,.$$

Zadanie **2.** Obliczyć wartość granicy
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^5y^5}{x^8+y^{14}}$$
albo wykazać, że ta granica nie istnieje.

Zadanie **3.** Rozwiązać zagadnienie początkowe
$$x'=y\,,\qquad y'=x\,,\qquad x(0)=0\,,\qquad y(0)=2\,.$$

Zadanie **4.** Niech
$$A=\begin{pmatrix} x & y\\ -y & x\end{pmatrix},$$
gdzie x, y są liczbami rzeczywistymi z przedziału $[0,1]$ spełniającymi warunek $x^2+y^2=1$. Dla liczby naturalnej $n>1$ przyjmijmy
$$A^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix}.$$
Udowodnić, że $a_n^2+b_n^2=1$.

Zadanie **5.** Rozstrzygnąć, czy grupa permutacji S_{10} zawiera podgrupę izomorficzną z $\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_5$.

Zadanie **6.** W urnie znajduje się n kul, z których jedna jest biała, a pozostałe $n-1$ to kule czarne. Losujemy z urny n-krotnie po jednej kuli, przy czym po każdym losowaniu wylosowana kula wraca z powrotem do urny (losowanie ze zwracaniem). Niech P_n będzie prawdopodobieństwem, że za każdym razem wylosowano kulę czarną. Obliczyć
$$\lim_{n\to\infty}P_n\,.$$