1. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{20n}\frac{n^2}{n^3+k}=\mathbf{20}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{19n}\frac{n^2}{n^3+k}=\mathbf{18}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2n+1}^{18n}\frac{n^2}{n^3+k}=\mathbf{16}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=3n+1}^{17n}\frac{n^2}{n^3+k}=\mathbf{14}$

2. Niech $C(k)=\int\limits_0^{k\pi}\sqrt[k]{\sin^k x}\,dx$. Wówczas

a) $C(5)=\mathbf{2}$

b) $C(4)=\mathbf{8}$

c) $C(3)=\mathbf{2}$

d) $C(2)=\mathbf{4}$

3. Niech $C(k)=\int\limits_1^{2}\frac{dx}{x^2+kx}$. Wówczas

a) $C(2)=\mathbf{\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{3}{2}}$

b) $C(1)=\mathbf{\ln\frac{4}{3}}$

c) $C(4)=\mathbf{\frac{1}{4}\cdot\ln\frac{5}{3}}$

d) $C(3)=\mathbf{\frac{1}{3}\cdot\ln\frac{8}{5}}$

4. Niech $f(x)=x^5\cdot\ln\left(1+x^3\right)$. Podaj wartość pochodnej danego rzędu.

a) $f^{(20)}(0)=\mathbf{20!/5}$

b) $f^{(11)}(0)=\mathbf{-11!/2}$

c) $f^{(14)}(0)=\mathbf{14!/3}$

d) $f^{(17)}(0)=\mathbf{-17!/4}$

5. Podaj w możliwie prostej postaci takie wyrażenia A, B, C, D, aby dla każdej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

a) $$\int\limits_2^3\int\limits_0^x f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_A^B\int\limits_C^D f(r\cos\varphi,\,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\mathbf{0}$ $B=\boldsymbol{\pi/4}$ $C=\mathbf{2/\cos\varphi}$ $D=\mathbf{3/\cos\varphi}$

b) $$\int\limits_0^4\int\limits_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_A^B\int\limits_C^D f(r\cos\varphi,\,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\boldsymbol{-\pi/2}$ $B=\boldsymbol{\pi/2}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\mathbf{4\cos\varphi}$

c) $$\int\limits_0^2\int\limits_x^2 f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_A^B\int\limits_C^D f(r\cos\varphi,\,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\boldsymbol{\pi/4}$ $B=\boldsymbol{\pi/2}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\mathbf{2/\sin\varphi}$

d) $$\int\limits_{-2}^2\int\limits_{2-\sqrt{4-x^2}}^{2+\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_A^B\int\limits_C^D f(r\cos\varphi,\,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\mathbf{0}$ $B=\boldsymbol{\pi}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\mathbf{4\sin\varphi}$

6. Dla podanej liczby zespolonej z_0 podaj taką liczbę zespoloną z, aby $|z-i|=|z-1|=|z-z_0|$.

a) $z_0=11$, $z=\mathbf{6+6i}$

b) $z_0=7$, $z=\mathbf{4+4i}$

c) $z_0=3$, $z=\mathbf{2+2i}$

d) $z_0=5$, $z=\mathbf{3+3i}$

7. Podaj w postaci ułamka nieskracalnego cosinus kąta między wektorami v_1 i v_2.

a) $v_1 = (1,2)$, $v_2 = (2,1)$, $\cos(v_1, v_2) = \mathbf{4/5}$

b) $v_1 = (1,3)$, $v_2 = (3,1)$, $\cos(v_1, v_2) = \mathbf{3/5}$

c) $v_1 = (3,4)$, $v_2 = (3,-4)$, $\cos(v_1, v_2) = \mathbf{-7/25}$

d) $v_1 = (3,4)$, $v_2 = (4,3)$, $\cos(v_1, v_2) = \mathbf{24/25}$

8. Dla podanej macierzy wskaż takie wartości parametrów p i q, aby macierz miała wartości własne 1 i 2.

a) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ p & q \end{pmatrix}$, $p = \mathbf{-6/5}$, $q = \mathbf{-1}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ p & q \end{pmatrix}$, $p = \mathbf{-1/2}$, $q = \mathbf{0}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ p & q \end{pmatrix}$, $p = \mathbf{0}$, $q = \mathbf{1}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ p & q \end{pmatrix}$, $p = \mathbf{0}$, $q = \mathbf{2}$

9. Podaj liczbę elementów rzędu 6 w podanej grupie.

a) $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$, **24**

b) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$, **6**

c) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$, **2**

d) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$, **8**

10. Dla podanych liczb a i b podaj zbiór wszystkich takich liczb naturalnych $n \in [a, b]$, że pierścień $\mathbb{Z}_n$ z dodawaniem i mnożeniem modulo n jest ciałem.

a) $a=40,\ b=49,\quad n \in \{\mathbf{41, 43, 47}\}$

b) $a=30,\ b=39,\quad n \in \{\mathbf{31, 37}\}$

c) $a=10,\ b=19,\quad n \in \{\mathbf{11, 13, 17, 19}\}$

d) $a=20,\ b=29,\quad n \in \{\mathbf{23, 29}\}$

11. Rzucamy monetą tak długo, aż wypadnie orzeł. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że przed wyrzuceniem orła pojawło się dokładnie n reszek. Podaj w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(4) = \mathbf{1/32}$

b) $P(1) = \mathbf{1/4}$

c) $P(2) = \mathbf{1/8}$

d) $P(3) = \mathbf{1/16}$

12. Rzucamy kostką do gry. Jeżeli wypadło mniej niż n oczek, unieważniamy pierwszy rzut i rzucamy po raz drugi – w tym wypadku wynik drugiego rzutu jest ostateczny. Niech $E(n)$ będzie wartością oczekiwaną liczby oczek, jaka widnieje na kostce. Podaj w postaci liczby naturalnej lub ułamka nieskracalnego:

a) $E(3) = \mathbf{25/6}$

b) $E(4) = \mathbf{17/4}$

c) $E(5) = \mathbf{25/6}$

d) $E(2) = \mathbf{47/12}$

1. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2n+1}^{18n}\frac{n^2}{n^3+k}=\mathbf{16}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{19n}\frac{n^2}{n^3+k}=\mathbf{18}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{20n}\frac{n^2}{n^3+k}=\mathbf{20}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=3n+1}^{17n}\frac{n^2}{n^3+k}=\mathbf{14}$

2. Niech $C(k)=\int\limits_0^{k\pi}\sqrt[k]{\sin^k x}\,dx$. Wówczas

a) $C(2)=\mathbf{4}$

b) $C(3)=\mathbf{2}$

c) $C(5)=\mathbf{2}$

d) $C(4)=\mathbf{8}$

3. Niech $C(k)=\int\limits_1^{2}\frac{dx}{x^2+kx}$. Wówczas

a) $C(4)=\mathbf{\frac{1}{4}\cdot\ln\frac{5}{3}}$

b) $C(2)=\mathbf{\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{3}{2}}$

c) $C(1)=\mathbf{\ln\frac{4}{3}}$

d) $C(3)=\mathbf{\frac{1}{3}\cdot\ln\frac{8}{5}}$

4. Niech $f(x)=x^5\cdot\ln\left(1+x^3\right)$. Podaj wartość pochodnej danego rzędu.

a) $f^{(20)}(0)=\mathbf{20!/5}$

b) $f^{(17)}(0)=\mathbf{-17!/4}$

c) $f^{(14)}(0)=\mathbf{14!/3}$

d) $f^{(11)}(0)=\mathbf{-11!/2}$

5. Podaj w możliwie prostej postaci takie wyrażenia A, B, C, D, aby dla każdej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

a) $$\int\limits_{-2}^{2}\int\limits_{2-\sqrt{4-x^2}}^{2+\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_{A}^{B}\int\limits_{C}^{D} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\mathbf{0}$ $B=\boldsymbol{\pi}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\mathbf{4\sin\boldsymbol{\varphi}}$

b) $$\int\limits_{0}^{4}\int\limits_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_{A}^{B}\int\limits_{C}^{D} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\mathbf{-\boldsymbol{\pi}/2}$ $B=\mathbf{\boldsymbol{\pi}/2}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\mathbf{4\cos\boldsymbol{\varphi}}$

c) $$\int\limits_{0}^{2}\int\limits_{x}^{2} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_{A}^{B}\int\limits_{C}^{D} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\mathbf{\boldsymbol{\pi}/4}$ $B=\mathbf{\boldsymbol{\pi}/2}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\mathbf{2/\sin\boldsymbol{\varphi}}$

d) $$\int\limits_{2}^{3}\int\limits_{0}^{x} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_{A}^{B}\int\limits_{C}^{D} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\mathbf{0}$ $B=\mathbf{\boldsymbol{\pi}/4}$ $C=\mathbf{2/\cos\boldsymbol{\varphi}}$ $D=\mathbf{3/\cos\boldsymbol{\varphi}}$

6. Dla podanej liczby zespolonej z_0 podaj taką liczbę zespoloną z, aby $|z-i|=|z-1|=|z-z_0|$.

a) $z_0=7$, $z=\mathbf{4+4i}$

b) $z_0=5$, $z=\mathbf{3+3i}$

c) $z_0=11$, $z=\mathbf{6+6i}$

d) $z_0=3$, $z=\mathbf{2+2i}$

7. Podaj w postaci ułamka nieskracalnego cosinus kąta między wektorami v_1 i v_2.

a) $v_1=(1{,}2)$, $\quad v_2=(2{,}1)$, $\quad \cos(v_1,v_2)=\mathbf{4/5}$

b) $v_1=(1{,}3)$, $\quad v_2=(3{,}1)$, $\quad \cos(v_1,v_2)=\mathbf{3/5}$

c) $v_1=(3{,}4)$, $\quad v_2=(4{,}3)$, $\quad \cos(v_1,v_2)=\mathbf{24/25}$

d) $v_1=(3{,}4)$, $\quad v_2=(3{,}-4)$, $\quad \cos(v_1,v_2)=\mathbf{-7/25}$

8. Dla podanej macierzy wskaż takie wartości parametrów p i q, aby macierz miała wartości własne 1 i 2.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ p & q \end{pmatrix}$, $\quad p=\mathbf{0}$, $\quad q=\mathbf{2}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ p & q \end{pmatrix}$, $\quad p=\mathbf{-1/2}$, $\quad q=\mathbf{0}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ p & q \end{pmatrix}$, $\quad p=\mathbf{0}$, $\quad q=\mathbf{1}$

d) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ p & q \end{pmatrix}$, $\quad p=\mathbf{-6/5}$, $\quad q=\mathbf{-1}$

9. Podaj liczbę elementów rzędu 6 w podanej grupie.

a) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$, **6**

b) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$, **8**

c) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$, **2**

d) $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$, **24**

10. Dla podanych liczb a i b podaj zbiór wszystkich takich liczb naturalnych $n \in [a, b]$, że pierścień $\mathbb{Z}_n$ z dodawaniem i mnożeniem modulo n jest ciałem.

a) $a = 20,\ b = 29,\quad n \in \{\mathbf{23, 29}\}$

b) $a = 40,\ b = 49,\quad n \in \{\mathbf{41, 43, 47}\}$

c) $a = 30,\ b = 39,\quad n \in \{\mathbf{31, 37}\}$

d) $a = 10,\ b = 19,\quad n \in \{\mathbf{11, 13, 17, 19}\}$

11. Rzucamy monetą tak długo, aż wypadnie orzeł. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że przed wyrzuceniem orła pojawło się dokładnie n reszek. Podaj w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(3) = \mathbf{1/16}$

b) $P(4) = \mathbf{1/32}$

c) $P(2) = \mathbf{1/8}$

d) $P(1) = \mathbf{1/4}$

12. Rzucamy kostką do gry. Jeżeli wypadło mniej niż n oczek, unieważniamy pierwszy rzut i rzucamy po raz drugi – w tym wypadku wynik drugiego rzutu jest ostateczny. Niech $E(n)$ będzie wartością oczekiwaną liczby oczek, jaka widnieje na kostce. Podaj w postaci liczby naturalnej lub ułamka nieskracalnego:

a) $E(3) = \mathbf{25/6}$

b) $E(4) = \mathbf{17/4}$

c) $E(2) = \mathbf{47/12}$

d) $E(5) = \mathbf{25/6}$

1. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2n+1}^{18n}\frac{n^2}{n^3+k}=\mathbf{16}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{20n}\frac{n^2}{n^3+k}=\mathbf{20}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=3n+1}^{17n}\frac{n^2}{n^3+k}=\mathbf{14}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{19n}\frac{n^2}{n^3+k}=\mathbf{18}$

2. Niech $C(k)=\int\limits_{0}^{k\pi}\sqrt[k]{\sin^k x}\,dx$. Wówczas

a) $C(5)=\mathbf{2}$

b) $C(3)=\mathbf{2}$

c) $C(2)=\mathbf{4}$

d) $C(4)=\mathbf{8}$

3. Niech $C(k)=\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{x^2+kx}$. Wówczas

a) $C(1)=\mathbf{\ln\frac{4}{3}}$

b) $C(2)=\mathbf{\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{3}{2}}$

c) $C(4)=\mathbf{\frac{1}{4}\cdot\ln\frac{5}{3}}$

d) $C(3)=\mathbf{\frac{1}{3}\cdot\ln\frac{8}{5}}$

4. Niech $f(x)=x^5\cdot\ln\left(1+x^3\right)$. Podaj wartość pochodnej danego rzędu.

a) $f^{(20)}(0)=\mathbf{20!/5}$

b) $f^{(14)}(0)=\mathbf{14!/3}$

c) $f^{(17)}(0)=\mathbf{-17!/4}$

d) $f^{(11)}(0)=\mathbf{-11!/2}$

5. Podaj w możliwie prostej postaci takie wyrażenia A, B, C, D, aby dla każdej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

a) $$\int_0^2\int_x^2 f(x,y)\,dy\,dx=\int_A^B\int_C^D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\boldsymbol{\pi/4}$ $B=\boldsymbol{\pi/2}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\mathbf{2/sin}\boldsymbol{\varphi}$

b) $$\int_2^3\int_0^x f(x,y)\,dy\,dx=\int_A^B\int_C^D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\mathbf{0}$ $B=\boldsymbol{\pi/4}$ $C=\mathbf{2/cos}\boldsymbol{\varphi}$ $D=\mathbf{3/cos}\boldsymbol{\varphi}$

c) $$\int_{-2}^{2}\int_{2-\sqrt{4-x^2}}^{2+\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx=\int_A^B\int_C^D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\mathbf{0}$ $B=\boldsymbol{\pi}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\mathbf{4\,sin}\boldsymbol{\varphi}$

d) $$\int_0^4\int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx=\int_A^B\int_C^D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\boldsymbol{-\pi/2}$ $B=\boldsymbol{\pi/2}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\mathbf{4\,cos}\boldsymbol{\varphi}$

6. Dla podanej liczby zespolonej z_0 podaj taką liczbę zespoloną z, aby $|z-i|=|z-1|=|z-z_0|$.

a) $z_0=7$, $z=\mathbf{4+4i}$

b) $z_0=5$, $z=\mathbf{3+3i}$

c) $z_0=11$, $z=\mathbf{6+6i}$

d) $z_0=3$, $z=\mathbf{2+2i}$

7. Podaj w postaci ułamka nieskracalnego cosinus kąta między wektorami v_1 i v_2.

a) $v_1 = (1{,}3), \quad v_2 = (3{,}1), \quad \cos(v_1, v_2) = \mathbf{3/5}$

b) $v_1 = (3{,}4), \quad v_2 = (4{,}3), \quad \cos(v_1, v_2) = \mathbf{24/25}$

c) $v_1 = (1{,}2), \quad v_2 = (2{,}1), \quad \cos(v_1, v_2) = \mathbf{4/5}$

d) $v_1 = (3{,}4), \quad v_2 = (3{,}-4), \quad \cos(v_1, v_2) = \mathbf{-7/25}$

8. Dla podanej macierzy wskaż takie wartości parametrów p i q, aby macierz miała wartości własne 1 i 2.

a) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ p & q \end{pmatrix}, \quad p = \mathbf{-6/5}, \quad q = \mathbf{-1}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ p & q \end{pmatrix}, \quad p = \mathbf{-1/2}, \quad q = \mathbf{0}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ p & q \end{pmatrix}, \quad p = \mathbf{0}, \quad q = \mathbf{1}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ p & q \end{pmatrix}, \quad p = \mathbf{0}, \quad q = \mathbf{2}$

9. Podaj liczbę elementów rzędu 6 w podanej grupie.

a) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$, **6** **b)** $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$, **24**

c) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$, **2** **d)** $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$, **8**

10. Dla podanych liczb a i b podaj zbiór wszystkich takich liczb naturalnych $n \in [a, b]$, że pierścień $\mathbb{Z}_n$ z dodawaniem i mnożeniem modulo n jest ciałem.

a) $a = 10,\ b = 19,\quad n \in \{\mathbf{11, 13, 17, 19}\}$

b) $a = 40,\ b = 49,\quad n \in \{\mathbf{41, 43, 47}\}$

c) $a = 30,\ b = 39,\quad n \in \{\mathbf{31, 37}\}$

d) $a = 20,\ b = 29,\quad n \in \{\mathbf{23, 29}\}$

11. Rzucamy monetą tak długo, aż wypadnie orzeł. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że przed wyrzuceniem orła pojawło się dokładnie n reszek. Podaj w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(4) = \mathbf{1/32}$ **b)** $P(2) = \mathbf{1/8}$

c) $P(1) = \mathbf{1/4}$ **d)** $P(3) = \mathbf{1/16}$

12. Rzucamy kostką do gry. Jeżeli wypadło mniej niż n oczek, unieważniamy pierwszy rzut i rzucamy po raz drugi – w tym wypadku wynik drugiego rzutu jest ostateczny. Niech $E(n)$ będzie wartością oczekiwaną liczby oczek, jaka widnieje na kostce. Podaj w postaci liczby naturalnej lub ułamka nieskracalnego:

a) $E(4) = \mathbf{17/4}$ **b)** $E(5) = \mathbf{25/6}$

c) $E(2) = \mathbf{47/12}$ **d)** $E(3) = \mathbf{25/6}$

1. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{20n}\frac{n^2}{n^3+k}=\mathbf{20}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=3n+1}^{17n}\frac{n^2}{n^3+k}=\mathbf{14}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{19n}\frac{n^2}{n^3+k}=\mathbf{18}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2n+1}^{18n}\frac{n^2}{n^3+k}=\mathbf{16}$

2. Niech $C(k)=\int\limits_0^{k\pi}\sqrt[k]{\sin^k x}\,dx$. Wówczas

a) $C(5)=\mathbf{2}$

b) $C(2)=\mathbf{4}$

c) $C(4)=\mathbf{8}$

d) $C(3)=\mathbf{2}$

3. Niech $C(k)=\int\limits_1^{2}\frac{dx}{x^2+kx}$. Wówczas

a) $C(4)=\mathbf{\frac{1}{4}\cdot\ln\frac{5}{3}}$

b) $C(2)=\mathbf{\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{3}{2}}$

c) $C(3)=\mathbf{\frac{1}{3}\cdot\ln\frac{8}{5}}$

d) $C(1)=\mathbf{\ln\frac{4}{3}}$

4. Niech $f(x)=x^5\cdot\ln\left(1+x^3\right)$. Podaj wartość pochodnej danego rzędu.

a) $f^{(20)}(0)=\mathbf{20!/5}$

b) $f^{(17)}(0)=\mathbf{-17!/4}$

c) $f^{(11)}(0)=\mathbf{-11!/2}$

d) $f^{(14)}(0)=\mathbf{14!/3}$

5. Podaj w możliwie prostej postaci takie wyrażenia A, B, C, D, aby dla każdej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

a) $$\int_0^2\int_x^2 f(x,y)\,dy\,dx=\int_A^B\int_C^D f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\boldsymbol{\pi/4}$ $B=\boldsymbol{\pi/2}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\mathbf{2/\sin}\boldsymbol{\varphi}$

b) $$\int_2^3\int_0^x f(x,y)\,dy\,dx=\int_A^B\int_C^D f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\mathbf{0}$ $B=\boldsymbol{\pi/4}$ $C=\mathbf{2/\cos}\boldsymbol{\varphi}$ $D=\mathbf{3/\cos}\boldsymbol{\varphi}$

c) $$\int_0^4\int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx=\int_A^B\int_C^D f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\boldsymbol{-\pi/2}$ $B=\boldsymbol{\pi/2}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\mathbf{4\cos}\boldsymbol{\varphi}$

d) $$\int_{-2}^2\int_{2-\sqrt{4-x^2}}^{2+\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx=\int_A^B\int_C^D f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\mathbf{0}$ $B=\boldsymbol{\pi}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\mathbf{4\sin}\boldsymbol{\varphi}$

6. Dla podanej liczby zespolonej z_0 podaj taką liczbę zespoloną z, aby $|z-i|=|z-1|=|z-z_0|$.

a) $z_0=7$, $z=\mathbf{4+4i}$ **b)** $z_0=5$, $z=\mathbf{3+3i}$

c) $z_0=11$, $z=\mathbf{6+6i}$ **d)** $z_0=3$, $z=\mathbf{2+2i}$

7. Podaj w postaci ułamka nieskracalnego cosinus kąta między wektorami v_1 i v_2.

a) $v_1=(3{,}4)$, $v_2=(3,-4)$, $\cos(v_1,v_2)=\mathbf{-7/25}$

b) $v_1=(1{,}3)$, $v_2=(3{,}1)$, $\cos(v_1,v_2)=\mathbf{3/5}$

c) $v_1=(3{,}4)$, $v_2=(4{,}3)$, $\cos(v_1,v_2)=\mathbf{24/25}$

d) $v_1=(1{,}2)$, $v_2=(2{,}1)$, $\cos(v_1,v_2)=\mathbf{4/5}$

8. Dla podanej macierzy wskaż takie wartości parametrów p i q, aby macierz miała wartości własne 1 i 2.

a) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ p & q \end{pmatrix}$, $p=\mathbf{-6/5}$, $q=\mathbf{-1}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ p & q \end{pmatrix}$, $p=\mathbf{-1/2}$, $q=\mathbf{0}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ p & q \end{pmatrix}$, $p=\mathbf{0}$, $q=\mathbf{1}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ p & q \end{pmatrix}$, $p=\mathbf{0}$, $q=\mathbf{2}$

9. Podaj liczbę elementów rzędu 6 w podanej grupie.

a) $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$, **24**

b) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$, **2**

c) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$, **6**

d) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$, **8**

10. Dla podanych liczb a i b podaj zbiór wszystkich takich liczb naturalnych $n \in [a, b]$, że pierścień $\mathbb{Z}_n$ z dodawaniem i mnożeniem modulo n jest ciałem.

a) $a = 20,\ b = 29,\quad n \in \{\mathbf{23, 29}\}$

b) $a = 10,\ b = 19,\quad n \in \{\mathbf{11, 13, 17, 19}\}$

c) $a = 40,\ b = 49,\quad n \in \{\mathbf{41, 43, 47}\}$

d) $a = 30,\ b = 39,\quad n \in \{\mathbf{31, 37}\}$

11. Rzucamy monetą tak długo, aż wypadnie orzeł. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że przed wyrzuceniem orła pojawło się dokładnie n reszek. Podaj w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(4) = \mathbf{1/32}$

b) $P(3) = \mathbf{1/16}$

c) $P(1) = \mathbf{1/4}$

d) $P(2) = \mathbf{1/8}$

12. Rzucamy kostką do gry. Jeżeli wypadło mniej niż n oczek, unieważniamy pierwszy rzut i rzucamy po raz drugi – w tym wypadku wynik drugiego rzutu jest ostateczny. Niech $E(n)$ będzie wartością oczekiwaną liczby oczek, jaka widnieje na kostce. Podaj w postaci liczby naturalnej lub ułamka nieskracalnego:

a) $E(5) = \mathbf{25/6}$

b) $E(4) = \mathbf{17/4}$

c) $E(3) = \mathbf{25/6}$

d) $E(2) = \mathbf{47/12}$