EGZAMIN MAGISTERSKI, 13.02.2024 r.
Matematyka w ekonomii

Zadanie **1. (8 punktów)**

Niech (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ..., (X_n, Y_n) będzie próbą losową rozmiaru n. Rozważmy klasyczny model regresji liniowej,

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \epsilon_i,$$

gdzie ϵ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym $N(0, \sigma^2)$.

(i) Zdefiniuj matematycznie estymatory najmniejszych kwadratów, $\hat{\beta}_0$ i $\hat{\beta}_1$, odpowiednio parametrów β_0 oraz β_1, jako rozwiązania problemu optymalizacyjnego.

(ii) Jeśli rozwiążesz problem optymalizacji z części (i), jaki wynik uzyskasz dla $\hat{\beta}_0$? Nie wyprowadzaj, tylko podaj postać.

(iii) Jeśli rozwiążesz problem optymalizacji z części (i), jaki wynik uzyskasz dla $\hat{\beta}_1$? Nie wyprowadzaj, tylko podaj postać.

(iv) Wyznacz postać warunkowej wartości oczekiwanej $\mathrm{E}[\hat{\beta}_1 \,|\, X_i]$. Uzasadnij wszystkie kroki.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbą z rozkładu o gęstości $f(x) = \lambda \exp\{-\lambda x\} \mathbb{1}(x > 0)$, $\lambda > 0$. Niech $Y_1 = \min_{1 \le i \le n} X_i$, a $Y_n = \max_{1 \le i \le n} X_i$. Wyznacz gęstość Y_1 oraz Y_n.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Sprawdź, czy proces stochastyczny, $\{X_t,\, t \in \mathbb{Z}\}$, opisany równaniem rekurencyjnym

$$X_t + 0.2\, X_{t-1} - 0.48\, X_{t-2} = W_t + 0.2\, W_{t-1},$$

gdzie $\{W_t,\, t \in \mathbb{Z}\}$ jest procesem białego szumu, ze średnią 0 i wariancją σ^2,

(i) jest stacjonarny?

(i) jest wynikowy?

(ii) jest odwracalny?

Zadanie **4. (8 punktów)**

Niech $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_i = 0) = q = 1 - p$ oraz $S_n = X_1 + \ldots, +X_n$ (zakładamy $n > 2$ i $0 < p < 1$). Rozważmy wektor losowym $(Y_1, \ldots, Y_n)$, który ma rozkład taki sam jak $(X_1, \ldots, X_n)$ pod warunkiem $S_n = 1$.

(i) Jaki rozkład ma Y_i oraz policzyć wartość oczekiwaną i wariancję Y_i.

(ii) Policzyć kowariancję (Y_i, Y_j), gdzie $i \neq j$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 13.02.2024 r.
Nauczycielska

Zadanie **1. (8 punktów)**
Niech $\mu\colon \mathrm{Bor}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ będzie dana wzorem

$$\mu(B) = \lambda(B) + \delta_0(B),$$

gdzie λ jest miarą Lebesgue'a, a δ_0 deltą Diraca w 0.

a) Pokaż, że μ jest miarą.

b) Oblicz $\mu(\mathbb{Q} \cup ([2,3] \setminus \mathbb{Q}))$.

c) Pokaż, że jeżeli f jest funkcją borelowską, to

$$\int_{[0,1]} f \, d\mu = \int_{[0,1]} f \, d\lambda + f(0).$$

(Wskazówka: spróbuj najpierw wykazać powyższy fakt dla funkcji prostych, tzn. przyjmujących tylko skończenie wiele wartości).

Zadanie **2. (8 punktów)**
Jaka jest reszta z dzielenia 2^{1000} przez 13?

Zadanie **3. (8 punktów)**
Jednokładność o środku w punkcie (x_0, y_0) i skali $k \neq 0$ to przekształcenie $J^k_{(x_0,y_0)} : R^2 \to R^2$ zadane we współrzędnych wzorem

$$J^k_{(x_0,y_0)}(x,y) = (x_0 + k(x - x_0), y_0 + k(y - y_0)).$$

1. Posługując się wzorem we współrzędnych na translację T o wektor $[a,b]$, znajdź wzór przekształcenia złożonego $J^k_{(x_0,y_0)} \circ T$ we współrzędnych.

2. Uzasadnij, że jeśli skala k jednokładości z poprzedniego punktu jest różna od 1, to przekształcenie złożone posiada dokładnie jeden punkt stały (czyli taki punkt A, że $J^k_{(x_0,y_0)} \circ T(A) = A$). Wylicz współrzędne tego punktu stałego.

3. Posługując się obydwoma poprzednimi punktami uzasadnij, że jeśli $k \neq 1$ to powyższe złożenie translacji z jednokładnością jest jednokładnością o tej samej skali k, względem punktu stałego A wyznaczonego powyżej.

Zadanie **4. (8 punktów)**
Na zbiorze $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ mamy następującą relację:

$$\mathcal{R}_0 = \big\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 4, 5\rangle\big\}.$$

Czy istnieją takie realacje $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ na X, że $\mathcal{R}_0 \subseteq \mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_0 \subseteq \mathcal{R}_2$ oraz
$\mathcal{R}_1$ jest relacją równoważności na X?
$\mathcal{R}_2$ jest funkcją $X \to X$?
Odpowiedzi uzasadnij.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 13.02.2024 r.
Matematyka teoretyczna

Zadanie **1. (8 punktów)**
Niech $\mu\colon \mathrm{Bor}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ będzie dana wzorem
$$\mu(B) = \lambda(B) + \delta_0(B),$$
gdzie λ jest miarą Lebesgue'a, a δ_0 deltą Diraca w 0.

a) Pokaż, że μ jest miarą.

b) Oblicz $\mu(\mathbb{Q} \cup ([2,3] \setminus \mathbb{Q}))$.

c) Pokaż, że jeżeli f jest funkcją borelowską, to
$$\int_{[0,1]} f \, d\mu = \int_{[0,1]} f \, d\lambda + f(0).$$
(Wskazówka: spróbuj najpierw wykazać powyższy fakt dla funkcji prostych, tzn. przyjmujących tylko skończenie wiele wartości).

Zadanie **2. (8 punktów)**
Niech R będzie pierścieniem przemiennym z 1. Element $u \in R$ nazywamy *idempotentem*, gdy $u^2 = u$. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne.

(a) Istnieją niezerowe pierścienie z jednością R_1 oraz R_2, takie że $R \cong R_1 \times R_2$.

(b) Istnieją niezerowe idempotenty u i v w pierścieniu R, takie że $u+v=1$.

(c) Istnieje idempotent $u \in R \setminus \{0,1\}$.

Zadanie **3. (8 punktów)**
Niech $(Y_{n,m})_{1 \le m \le n}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że
$$\mathbb{P}[Y_{n,m} = 1] = \frac{1}{m} \quad \text{oraz} \quad \mathbb{P}[Y_{n,m} = 0] = 1 - \frac{1}{m}.$$

Zdefiniujmy ciąg zmiennych losowych

$$X_n = Y_{n,1} + Y_{n,2} + \ldots + Y_{n,n}.$$

Udowodnij, że

$$\frac{X_n - \log n}{\sqrt{\log n}} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

Zadanie **4. (8 punktów)**

Rozważmy przestrzeń $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ze standardową topologią.

a) Pokaż, że przestrzeń $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ jest polska.

b) Pokaż, że przestrzeń $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ nie jest przeliczalną sumą zbiorów zwartych.

c) Wskaż podprzestrzeń zbioru Cantora, która jest homeomorficzna z przestrzenią $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 13.02.2024 r.
Aktuarialno-finansowa

Zadanie **1. (8 punktów)**

Niech X_i, $i = 1, 2, 3, ...$ będzie ciągiem wzajemnie niezależnych zmiennych losowych takim, że $p = P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = -1)$, gdzie $p < \frac{1}{2}$. Znaleźć wszystkie takie $a > 0$ dla których proces stochastyczny $\{Y_k : k = 1, 2, 3, ...\}$ jest martyngałem, gdzie

$$Y_k = \left(\frac{a}{p}\right)^{\sum_{i=1}^{k} X_i}.$$

Odpowiedź uzasadnić.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Niech $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_i = 0) = q = 1 - p$ oraz $S_n = X_1 + \ldots, +X_n$ (zakładamy $n > 2$ i $0 < p < 1$). Rozważmy wektor losowym $(Y_1, \ldots, Y_n)$, który ma rozkład taki sam jak $(X_1, \ldots, X_n)$ pod warunkiem $S_n = 1$.
(i) Jaki rozkład ma Y_i oraz policzyć wartość oczekiwaną i wariancję Y_i.
(ii) Policzyć kowariancję (Y_i, Y_j), gdzie $i \neq j$.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Model ciągły. Niech $R(t) = u + ct - S(t)$ będzie procesem nadwyżki ubezpieczyciela gdzie:

- $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ jest złożonym procesem Poissona z parametrem częstotliwości λ, tzn. $N(t)$ ma rozkład Poissona o wartości oczekiwanej λt,
- wartość pojedynczej szkody X_i ma rozkład wykładniczy $Exp(\beta)$,
- składka c zawiera współczynnik bezpieczeństwa $\theta = 0.2$, co zapewnia, iż prawdopodobieństwo ruiny: $\Psi(u) = \frac{1}{10}$.

Udziałowcy zwiększyli nadwyżkę początkową dwukrotnie, do wysokości $2{\cdot}u$. Zakładając, iż wszystkie pozostałe parametry procesu nie uległy zmianie:

podaj wzór na narzut θ w tym modelu,
podaj wzór na prawdopodobieństwo ruiny w tym modelu,
wylicz prawdopodobieństwo ruiny przy podanych parametrach w zadaniu.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Spółkom A i B zaproponowano następujące roczne stopy oprocentowania kredytu w wysokości 1 mln PLN:

Spółka	**Oprocentowanie stałe**	**Oprocentowanie zmienne**
A	19.00%	WIBOR + 0.15%
B	21.25%	WIBOR + 0.9%

Pierwotnie spółka A otrzymała kredyt z oprocentowaniem stałym, a B z oprocentowaniem zmiennym. Jednak spółka A potrzebuje kredytu o stopie zmiennej, podczas gdy spółka B o stopie stałej. Zaprojektowano procentowy kontrakt SWAP (kontrakt zamiany strumieni płatności) z udziałem instytucji finansowej, w ramach którego instytucja ta zyskała na transakcjach 0.4% rocznie, zaś dla obu spółek kontrakt jest jednakowo atrakcyjny.

Ile wyniesie stała stopa procentowa płacona przez spółkę B w wyniku całościowego rozliczenia? Przedstaw swój tok rozumowania.