

EGZAMIN WSTĘPNY/LICENCJACKI (zadania otwarte)
15 września 2023 r.

Zadanie **1.** Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^{n^2} \cdot 2^{n^3}}{n^{n^3}}.$$

Zadanie **2.** Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x, y) = |4x + 2y| - x + 2y$$

na okręgu

$$\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Wyznaczyć wszystkie punkty, w których wartości najmniejsza i największa są osiągane.

Zadanie **3.** Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$x' = x \cdot (1 - x), \quad x(0) = \frac{1}{2}.$$

Zadanie **4.** Niech $P: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie rzutem ortogonalnym na prostą

$$\{(t, 2t, -t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Wyprowadzić (z uzasadnieniem) wzór na $P(x, y, z)$.

Zadanie **5.** Niech R będzie pierścieniem przemiennym z jednością $1 \neq 0$. Udowodnić, że nie istnieje element $x \in R \setminus \{0\}$, który równocześnie jest dzielnikiem zera i jest odwracalny.

Zadanie **6.** W urnie znajdują się dwie spreparowane monety. Jedna moneta jest tak wyważona, że przy rzucie tą monetą orzeł pojawia się z prawdopodobieństwem p , a reszka z prawdopodobieństwem $1-p$. A w drugiej monecie na odwrót: reszka pojawia się z prawdopodobieństwem p , a orzeł z prawdopodobieństwem $1-p$. Losujemy z urny jedną monetę, a następnie **tą monetą** wykonujemy 4 rzuty. Wyznaczyć wszystkie wartości $p \in (0, 1/2)$, dla których w powyższym eksperymencie prawdopodobieństwo wypadnięcia jednego orła jest równe prawdopodobieństwu wypadnięcia dwóch orłów.