EGZAMIN MAGISTERSKI, 14.09.2023 r.
Matematyka w ekonomii

Zadanie **1. (8 punktów)**

Rozważmy klasyczny model regresji liniowej,

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i,$$

gdzie ϵ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym $N(0, \sigma^2)$. Udowodnij następującą równość

$$\mathrm{Cov}(\bar{y}, \hat{\beta}_1) \; = \; 0,$$

gdzie $\hat{\beta}_1$ jest estymatorem najmniejszych kwadratów współczynnika kierunkowego prostej regresji natomiast $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbą z rozkładu o gęstości $f(x) = \lambda \exp\{-\lambda x\}\mathbb{1}(x > 0)$, $\lambda > 0$. Wyznacz estymator nieobciążony o minimalnej wariancji parametru λ.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Rozpatrz proces stochastyczny opisany równaniem rekurencyjnym

$$X_t = \frac{3}{2} X_{t-1} - \frac{1}{2} X_{t-2} + Z_t,$$

gdzie $\{Z_t,\, t \in \mathbb{Z}\}$ jest procesem białego szumu, ze średnią 0 i wariancją σ^2.

(i) Wykaż, że proces $\{X_t\}$ **nie jest** procesem stacjonarnym w szerszym sensie.

(ii) Wykaż, że szereg czasowy $\{Y_t,\, t \in \mathbb{Z}\}$, zdefiniowany jako

$$Y_t = X_t - X_{t-1},$$

jest procesem stacjonarnym w szerszym sensie.

(iii) Czy proces $\{Y_t\}$ jest procesem wynikowym?

Zadanie **4. (8 punktów)**

Niech (X, Y) ma dwuwymiarowy łączny rozkład normalny ze średnią $\mathbf{m} = (2, -1)$ oraz macierzą kowariancji

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Niech $Z = X + 2Y$.
(i) Jaki rozkład ma Z. Ile wynosi $\mathbb{P}(Z > 0)$? Uzasadnij!
(ii) Korzystając z załączonej poniżej tabelki oszacować $\mathbb{P}(|\frac{Z}{4}| > 1.96)$.

Tabela 1: Kwantyle z_p rzędu p standardowego rozkładu normalnego.

p	0.90	0.95	0.975	0.990	0.995
z_p	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

EGZAMIN MAGISTERSKI, 14.09.2023 r.
Nauczycielska

Zadanie **1. (8 punktów)**

Produktem przestrzeni metrycznych (X, d_X) i (Y, d_Y) nazywamy przestrzeń metryczną $(X \times Y, d)$, gdzie d jest zdefiniowana wzorem

$$d(\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2).$$

- Narysuj kulę o środku w $\langle 3, 4\rangle$ i promieniu 3 w produkcie $(\mathbb{R}, d_E)$ i $(\mathbb{R}, d_E)$, gdzie d_E jest metryką euklidesową.
- Czy produkt (X, d_X) i (Y, d_Y) jest homeomorficzny z produktem (Y, d_Y) i (X, d_X)? Odpowiedź uzasadnij.
- Niech (X, d_X) będzie przestrzenią metryczną. Wykaż, że zbiór $\{\langle x, x\rangle : x \in X\}$ jest domknięty w produkcie (X, d_X) i (X, d_X).

Zadanie **2. (8 punktów)**

Liczba x dana jest w sposób następujący:

$$x := \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}.$$

Czy x jest liczbą wymierną? Czy x jest liczbą algebraiczną? Każdą odpowiedź uzasadnij.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Na płaszczyźnie z układem kartezjańskim dane są punkty $A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$, $C = (2, 1)$, $D = (0, 1)$, $E = (0, 2)$ oraz $F = (2, 2)$.

1. Znajdź cztery różne izometrie płaszczyzny przekształacające prostokąt $ABCD$ na prostokąt $CDEF$. Opisz dokładnie każdą z tych czterech izometrii, podając jej parametry (środek i kąt obrotu, wektor przesunięcia, oś odbicia, oś i wektor poślizgu dla symetrii z poślizgiem, itd.).

2. Uzasadnij, że nie ma więcej niż cztery izometrii przekształcających $ABCD$ na $CDEF$.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ (rodzina wszystkich podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych) definiujemy relację $\mathcal{R}$ w sposób następujący:

$$A\mathcal{R}B \text{ wtedy i tylko wtedy gdy zbiór } A\triangle B \text{ jest skończony,}$$

gdzie "$\triangle$" oznacza różnicę symetryczną: $A\triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Udowodnij, że $\mathcal{R}$ jest relacją równoważności na $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Opisz klasę abstrakcji zbioru $A := \emptyset$ i zbioru $B := [0, 1]$. Odpowiedź uzasadnij.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 14.09.2023 r.
Matematyka stosowana

Zadanie **1. (8 punktów)**

Dla jakiej wartości parametru a równanie

$$y'' + ay = \sin t$$

opisuje rezonans drgań. Uzasadnić odpowiedź.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Zmiana wielkości dwóch populacji $x(t)$ i $y(t)$ opisana jest następującym układem równań:

$$x'(t) = \frac{x}{k_1}(k_1 - x - \alpha y),$$
$$y'(t) = \frac{y}{k_2}(k_2 - y - \beta x).$$

Zbadaj do jakiego poziomu będzie dążyła wielkość pierwszej populacji ($\lim_{t\to+\infty} x(t)$), przy następujących założeniach:

$$k_1 < \alpha k_2, \qquad \beta k_1 < k_2, \qquad y(t_0) > 0.$$

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech X_n będzie sumą liczby oczek wyrzuconych w n rzutach symetryczną kostką do gry. Niech Y_n będzie resztą z dzielenia X_n przez 5.

(i) Wyznacz macierz prawdopodobieństw przejść, w jednym kroku, dla łańcucha Markowa $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$.

(ii) Wyznacz wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty} P\left(X_n \text{ jest podzielne przez } 5\right).$$

Zadanie **4. (8 punktów)**

Niech (X, Y) ma dwuwymiarowy łączny rozkład normalny ze średnią $\mathbf{m} = (2, -1)$ oraz macierzą kowariancji

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Niech $Z = X + 2Y$.
(i) Jaki rozkład ma Z. Ile wynosi $\mathbb{P}(Z > 0)$? Uzasadnij!
(ii) Korzystając z załączonej poniżej tabelki oszacować $\mathbb{P}(|\frac{Z}{4}| > 1.96)$.

Tabela 2: Kwantyle z_p rzędu p standardowego rozkładu normalnego.

p	0.90	0.95	0.975	0.990	0.995
z_p	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

EGZAMIN MAGISTERSKI, 14.09.2023 r.
Matematyka teoretyczna

Zadanie **1. (8 punktów)**

Produktem przestrzeni metrycznych (X, d_X) i (Y, d_Y) nazywamy przestrzeń metryczną $(X \times Y, d)$, gdzie d jest zdefiniowana wzorem

$$d(\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2).$$

- Narysuj kulę o środku w $\langle 3, 4\rangle$ i promieniu 3 w produkcie $(\mathbb{R}, d_E)$ i $(\mathbb{R}, d_E)$, gdzie d_E jest metryką euklidesową.
- Czy produkt (X, d_X) i (Y, d_Y) jest homeomorficzny z produktem (Y, d_Y) i (X, d_X)? Odpowiedź uzasadnij.
- Niech (X, d_X) będzie przestrzenią metryczną. Wykaż, że zbiór $\{\langle x, x\rangle : x \in X\}$ jest domknięty w produkcie (X, d_X) i (X, d_X).

Zadanie **2. (8 punktów)**

(a)(2pkt) Podaj definicję komutanta grupy G, oznaczanego zazwyczaj przez G' lub $[G, G]$.
(b)(3pkt) Wyznacz komutant grupy $\mathrm{UT}_3(\mathbb{R})$ macierzy górnotrójkątnych rozmiaru 3×3 z jedynkami na przekątnej.
(c)(3pkt) Udowodnij, że iloraz $\mathrm{UT}_3(\mathbb{R})/\mathrm{UT}_3(\mathbb{R})'$ jest izomorficzny z $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i X_n ma rozkład jednostajny na $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$.

a) Pokaż, że

$$M_n = \sum_{j=1}^{n} X_j X_{j+1}$$

jest martyngałem względem filtracji $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1}\}$.

b) Pokaż, że

$$\sup_n \mathbb{E} M_n^2 < \infty$$

i wywnioskuj, że martyngał M_n jest zbieżny w L^2.

c) Czy stąd wynika również, że martyngał M_n jest zbieżny p.w.?

Zadanie **4. (8 punktów)**
Udowodnij, że równanie

$$u(t) = 1 + \int_0^t u^4(s)ds$$

ma rozwiązanie na odcinku $[0, a]$ dla pewnego $a > 0$. Czy jest to jedyne rozwiązanie?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 14.09.2023 r.
Matematyka teoretyczna

Zadanie **1. (8 punktów)**

Produktem przestrzeni metrycznych (X, d_X) i (Y, d_Y) nazywamy przestrzeń metryczną $(X \times Y, d)$, gdzie d jest zdefiniowana wzorem

$$d(\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2).$$

- Narysuj kulę o środku w $\langle 3, 4\rangle$ i promieniu 3 w produkcie $(\mathbb{R}, d_E)$ i $(\mathbb{R}, d_E)$, gdzie d_E jest metryką euklidesową.
- Czy produkt (X, d_X) i (Y, d_Y) jest homeomorficzny z produktem (Y, d_Y) i (X, d_X)? Odpowiedź uzasadnij.
- Niech (X, d_X) będzie przestrzenią metryczną. Wykaż, że zbiór $\{\langle x, x\rangle : x \in X\}$ jest domknięty w produkcie (X, d_X) i (X, d_X).

Zadanie **2. (8 punktów)**

(a)(2pkt) Podaj definicję komutanta grupy G, oznaczanego zazwyczaj przez G' lub $[G, G]$.
(b)(3pkt) Wyznacz komutant grupy $\mathrm{UT}_3(\mathbb{R})$ macierzy górnotrójkątnych rozmiaru 3×3 z jedynkami na przekątnej.
(c)(3pkt) Udowodnij, że iloraz $\mathrm{UT}_3(\mathbb{R})/\mathrm{UT}_3(\mathbb{R})'$ jest izomorficzny z $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i X_n ma rozkład jednostajny na $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$.

a) Pokaż, że

$$M_n = \sum_{j=1}^{n} X_j X_{j+1}$$

jest martyngałem względem filtracji $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1}\}$.

b) Pokaż, że
$$\sup_n \mathbb{E} M_n^2 < \infty$$
i wywnioskuj, że martyngał M_n jest zbieżny w L^2.

c) Czy stąd wynika również, że martyngał M_n jest zbieżny p.w.?

Zadanie **4. (8 punktów)**

Niech $e_n = (0, ..., 0, 1, 0, ...)$, $n = 1, 2, ...$, gdzie jedynka jest na n-tym miejscu, c_0 oznacza przestrzeń (zespolonych) ciągów zbieżnych do zera z normą supremum oraz $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ograniczonym ciągiem liczb zespolonych.

1. Dany jest operator liniowy i ciągły $A : c_0 \to c_0$, taki że
$$Ae_n = t_n(e_{2n+1} + e_{2n+2}), \quad n = 1, 2, \ldots .$$
Znajdź i uzasadnij wzór na Ax dla $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$.

2. Wyznacz $\|A\|_{c_0 \to c_0}$.

3. Podaj definicję operatora zwartego z przestrzeni Banacha X do przestrzeni Banacha Y.

4. Uzasadnij, że operator A jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do zera.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 14.09.2023 r.
Analiza danych

Zadanie **1. (8 punktów)**

Wektor losowy $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ ma dwuwymiarowy rozkład normalny $N(0, \Sigma)$, gdzie $\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Zajdź wartości własne tej macierzy i odpowiadające im wektory własne.

b) Wyznacz pierwszą składową główną tego rozkładu.

c) Jaki procent całkowitej wariancji tego wektora wyjaśnia pierwsza składowa główna ?

Zadanie **2. (8 punktów)**

Niech $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^\mathsf{T} \sim N_2(\mu, \Sigma)$, przy czym $\mu = (1,1)^\mathsf{T}$ oraz $\Sigma = \mathrm{diag}\{2, 2\}$. Niech $\mathbf{a} = (1,2)^\mathsf{T}$, $\mathbf{b} = (2,-1)^\mathsf{T}$. Jaki jest łączny rozkład wektora losowego $(\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{X}, \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{X})^\mathsf{T}$? Czy zmienne losowe $\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{X}$ oraz $\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{X}$ są niezależne? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbą z rozkładu o gęstości $f(x) = \lambda \exp\{-\lambda x\} \mathbb{1}(x > 0)$, $\lambda > 0$. Wyznacz estymator nieobciążony o minimalnej wariancji parametru λ.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Niech (X, Y) ma dwuwymiarowy łączny rozkład normalny ze średnią $\mathbf{m} = (2, -1)$ oraz macierzą kowariancji

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Niech $Z = X + 2Y$.
(i) Jaki rozkład ma Z. Ile wynosi $\mathbb{P}(Z > 0)$? Uzasadnij!
(ii) Korzystając z załączonej poniżej tabelki oszacować $\mathbb{P}(|\frac{Z}{4}| > 1.96)$.

Tabela 3: Kwantyle z_p rzędu p standardowego rozkładu normalnego.

p	0.90	0.95	0.975	0.990	0.995
z_p	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

EGZAMIN MAGISTERSKI, 14.09.2023 r.
Aktuarialno-finansowa

Zadanie **1. (8 punktów)**

Niech $\{B_1(t); t \geq 0\}$, $\{B_2(t); t \geq 0\}$ będą wzajemnie niezależnymi standardowymi ruchami Browna.
Znaleźć wszystkie pary $a, b \geq 0$ dla których

$$\{W_1(t) := \frac{aB_1(t) + bB_2(t)}{5},\ t \geq 0\}$$

oraz

$$\{W_2(t) := \frac{B_1(at) + B_2(bt)}{\sqrt{7}},\ t \geq 0\}$$

są standardowymi ruchami Browna. Odpowiedź uzasadnić.
Dla wyznaczonych a, b obliczyć

$$Cov(W_1(1), W_2(1)).$$

Zadanie **2. (8 punktów)**

Niech (X, Y) ma dwuwymiarowy łączny rozkład normalny ze średnią $\mathbf{m} = (2, -1)$ oraz macierzą kowariancji

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Niech $Z = X + 2Y$.
(i) Jaki rozkład ma Z. Ile wynosi $\mathbb{P}(Z > 0)$? Uzasadnij!
(ii) Korzystając z załączonej poniżej tabelki oszacować $\mathbb{P}(|\frac{Z}{4}| > 1.96)$.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Tabela 4: Kwantyle z_p rzędu p standardowego rozkładu normalnego.

p	0.90	0.95	0.975	0.990	0.995
z_p	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej X dany jest w tabeli:

x	0	1	2	5	10	20
$P(X = x)$	0.8	0.1	0.03	0.03	0.03	0.01

Wyznacz d, jeśli wiadomo, że $E[I_d(X)] = 0.37.$($I_d(Y) = (Y - d)_+$).

Zadanie **4. (8 punktów)**

Na pewnym rynku dostępne są dziś następujące instrumenty o podanych wartościach:

- Obligacja zerokuponowa zapadająca za 2 lata o nominale 10 000 zł, kosztująca dziś 9 000 zł.
- Kontrakt forward na akcję spółki ABC, niewypłacającej dywidend, z datą wykonania za 2 lata, dla którego dziś wyznaczona cena forward wynosi 150 zł (tj. dziś ten kontrakt jest wart 0 zł).
- Opcja europejska waniliowa put z ceną wykonania 135 zł na akcję spółki ABC, zapadająca za 2 lata, w cenie 24 zł.

Wykonaj następujące zadania:

1. Wyznacz dzisiejszą cenę europejskiej opcji waniliowej call z ceną wykonania 135 zł, zapadającej za 2 lata na akcję tej samej spółki ABC tak, aby nie wprowadzić arbitrażu na tym rynku.

2. Narysuj payoff portfela składającego się z jednego opisanego w zadaniu kontraktu forward w pozycji krótkiej oraz jednej akcji spółki ABC w pozycji długiej. Jaka jest dzisiejsza bezarbitrażowa cena takiego portfela oraz ile wynosi jego współczynnik grecki delta?