1. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^{p+2}+3}}$, ... **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^{p+3}+5}}$, ...

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^{p+5}+7}}$, ... **d)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n^{p+7}+11}}$, ...

2. Niech $C(a,b)$ będzie zdefiniowane wzorem $\int\limits_a^b \frac{2\,dx}{x^2+4x} = \ln C(a,b)$.
Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego:

a) $C(1,45)=$ .... **b)** $C(5,45)=$ ....

c) $C(1,5)=$ .... **d)** $C(2,12)=$ ....

3. Niech f będzie funkcją określoną wzorem $f(x)=x^{50}\cdot e^{x^5}$. Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(80)}(0)=$ .... **b)** $f^{(70)}(0)=$ ....

c) $f^{(100)}(0)=$ .... **d)** $f^{(90)}(0)=$ ....

4. Podać wartość całki oznaczonej, gdzie [.] oznacza część całowitą.

a) $\int\limits_0^{200} [x]\,dx=$ .... **b)** $\int\limits_0^{10} [x]\,dx=$ ....

c) $\int\limits_0^{20} [x]\,dx=$ .... **d)** $\int\limits_0^{101} [x]\,dx=$ ....

5. Podać w możliwe prostej postaci takie wyrażenia A, B, C, D, aby dla każdej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

a) $$\int\limits_{-2}^{2}\int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_{A}^{B}\int\limits_{C}^{D} f(x,y)\,dx\,dy$$

$A=$ .... $B=$ .... $C=$ .... $D=$ ....

b) $$\int\limits_{0}^{2}\int\limits_{1}^{2x+1} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_{A}^{B}\int\limits_{C}^{D} f(x,y)\,dx\,dy$$

$A=$ .... $B=$ .... $C=$ .... $D=$ ....

c) $$\int\limits_{1}^{2}\int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_{A}^{B}\int\limits_{C}^{D} f(x,y)\,dx\,dy$$

$A=$ .... $B=$ .... $C=$ .... $D=$ ....

d) $$\int\limits_{1}^{3}\int\limits_{2}^{11-3x} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_{A}^{B}\int\limits_{C}^{D} f(x,y)\,dx\,dy$$

$A=$ .... $B=$ .... $C=$ .... $D=$ ....

6. Podać w uproszczonej postaci taką liczbę rzeczywistą dodatnią a, aby liczba zespolona z podanej postaci spełniała równanie $\overline{z}=17z^{-1}$.

a) $z=4+ai$, $a=$ .... **b)** $z=3+ai$, $a=$ ....

c) $z=1+ai$, $a=$ .... **d)** $z=2+ai$, $a=$ ....

7. Rozważamy przestrzeń liniową wielomianów zmiennej x stopnia nie większego od 2023. W tej przestrzeni określamy przekształcenie liniowe F wzorem $F(W(x))=x\cdot W'(x)$. Dla podanej liczby λ podać niezerowy wektor własny przekształcenia F odpowiadający wartości własnej λ.

a) $\lambda=1$, ... **b)** $\lambda=4$, ...

c) $\lambda=256$, ... **d)** $\lambda=27$, ...

8. Dla podanej macierzy wskazać taką wartość parametru p, aby wyznacznik macierzy był równy 0.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 19 \\ 11 & 13 & 17 & 19 \\ 37 & 44 & 666 & 1001 \\ 13 & 16 & 22 & p \end{pmatrix}$, $p=$ ....

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 11 \\ 11 & 13 & 17 & 19 \\ 37 & 44 & 666 & 1001 \\ 13 & 16 & 22 & p \end{pmatrix}$, $p=$ ....

c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 11 & 13 & 17 & 23 \\ 37 & 44 & 666 & 1001 \\ 13 & 16 & 22 & p \end{pmatrix}$, $p=$ ....

d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 11 & 13 & 17 & 19 \\ 37 & 44 & 666 & 1001 \\ 13 & 16 & 22 & p \end{pmatrix}$, $p=$ ....

9. Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, natomiast działaniem jest mnożenie modulo 7. Wypisać wszystkie elementy danego rzędu.

a) rząd 6: .... **b)** rząd 2: ....

c) rząd 1: .... **d)** rząd 3: ....

10. Dla danych liczb a i b podać najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą c o następującej własności: Każdy ideał w pierścieniu $\mathbb{Z}$ zawierający liczby a i b zawiera także liczbę c.

a) $a=600 \quad b=1000, \quad c=$ .... **b)** $a=42 \quad b=70, \quad c=$ ....

c) $a=75 \quad b=125, \quad c=$ .... **d)** $a=30 \quad b=70, \quad c=$ ....

11. Rzucamy cztery razy kostką do gry. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że suma liczb oczek wyrzuconych w poszczególnych rzutach jest równa n. Podać w postaci ułamka o mianowniku $1296=6^4$:

a) $P(21)=$ ..../1296 **b)** $P(24)=$ ..../1296

c) $P(23)=$ ..../1296 **d)** $P(22)=$ ..../1296

12. W urnie znajduje się jedna kula z liczbą 1, dwie kule z liczbą 2, trzy kule z liczbą 3, ..., n kul z liczbą n. Losujemy z urny jedną kulę. Niech $E(n)$ będzie wartością oczekiwaną liczby napisanej na wylosowanej kuli. Podać w postaci liczby całkowiej lub ułamka nieskracalnego:

a) $E(10)=$ .... **b)** $E(40)=$ ....

c) $E(100)=$ .... **d)** $E(7)=$ ....