1. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^{p+2}+3}}$, $\boldsymbol{(-2,\infty)}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^{p+3}+5}}$, $\boldsymbol{(-3,\infty)}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^{p+5}+7}}$, $\boldsymbol{(-5,\infty)}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n^{p+7}+11}}$, $\boldsymbol{(-7,\infty)}$

2. Niech $C(a,b)$ będzie zdefiniowane wzorem $\int\limits_a^b \frac{2\,dx}{x^2+4x}=\ln C(a,b)$.
Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego:

a) $C(1,45)=\mathbf{15/7}$

b) $C(5,45)=\mathbf{9/7}$

c) $C(1,5)=\mathbf{5/3}$

d) $C(2,12)=\mathbf{3/2}$

3. Niech f będzie funkcją określoną wzorem $f(x)=x^{50}\cdot e^{x^5}$. Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(80)}(0)=\mathbf{80!/6!}$

b) $f^{(70)}(0)=\mathbf{70!/4!}$

c) $f^{(100)}(0)=\mathbf{100!/10!}$

d) $f^{(90)}(0)=\mathbf{90!/8!}$

4. Podać wartość całki oznaczonej, gdzie [.] oznacza część całowitą.

a) $\int\limits_0^{200}[x]\,dx=\mathbf{19\,900}$

b) $\int\limits_0^{10}[x]\,dx=\mathbf{45}$

c) $\int\limits_0^{20}[x]\,dx=\mathbf{190}$

d) $\int\limits_0^{101}[x]\,dx=\mathbf{5050}$

5. Podać w możliwe prostej postaci takie wyrażenia A, B, C, D, aby dla każdej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

a) $\displaystyle\int\limits_{-2}^{2}\int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_{A}^{B}\int\limits_{C}^{D} f(x,y)\,dx\,dy$

$A=\mathbf{0}$ $\qquad B=\mathbf{2}$ $\qquad C=-\sqrt{\mathbf{4-y^2}}$ $\qquad D=\sqrt{\mathbf{4-y^2}}$

b) $\displaystyle\int\limits_{0}^{2}\int\limits_{1}^{2x+1} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_{A}^{B}\int\limits_{C}^{D} f(x,y)\,dx\,dy$

$A=\mathbf{1}$ $\qquad B=\mathbf{5}$ $\qquad C=\mathbf{(y-1)/2}$ $\qquad D=\mathbf{2}$

c) $\displaystyle\int\limits_{1}^{2}\int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_{A}^{B}\int\limits_{C}^{D} f(x,y)\,dx\,dy$

$A=\mathbf{0}$ $\qquad B=\sqrt{\mathbf{3}}$ $\qquad C=\mathbf{1}$ $\qquad D=\sqrt{\mathbf{4-y^2}}$

d) $\displaystyle\int\limits_{1}^{3}\int\limits_{2}^{11-3x} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_{A}^{B}\int\limits_{C}^{D} f(x,y)\,dx\,dy$

$A=\mathbf{2}$ $\qquad B=\mathbf{8}$ $\qquad C=\mathbf{1}$ $\qquad D=\mathbf{(11-y)/3}$

6. Podać w uproszczonej postaci taką liczbę rzeczywistą dodatnią a, aby liczba zespolona z podanej postaci spełniała równanie $\overline{z}=17z^{-1}$.

a) $z=4+ai,\quad a=\mathbf{1}$ $\qquad$ **b)** $z=3+ai,\quad a=\sqrt{\mathbf{8}}=\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}$

c) $z=1+ai,\quad a=\mathbf{4}$ $\qquad$ **d)** $z=2+ai,\quad a=\sqrt{\mathbf{13}}$

7. Rozważamy przestrzeń liniową wielomianów zmiennej x stopnia nie większego od 2023. W tej przestrzeni określamy przekształcenie liniowe F wzorem $F(W(x))=x\cdot W'(x)$. Dla podanej liczby λ podać niezerowy wektor własny przekształcenia F odpowiadający wartości własnej λ.

a) $\lambda=1$, $\mathbf{x}$

b) $\lambda=4$, $\mathbf{x^4}$

c) $\lambda=256$, $\mathbf{x^{256}}$

d) $\lambda=27$, $\mathbf{x^{27}}$

8. Dla podanej macierzy wskazać taką wartość parametru p, aby wyznacznik macierzy był równy 0.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 19 \\ 11 & 13 & 17 & 19 \\ 37 & 44 & 666 & 1001 \\ 13 & 16 & 22 & p \end{pmatrix}$, $p=\mathbf{38}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 11 \\ 11 & 13 & 17 & 19 \\ 37 & 44 & 666 & 1001 \\ 13 & 16 & 22 & p \end{pmatrix}$, $p=\mathbf{30}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 11 & 13 & 17 & 23 \\ 37 & 44 & 666 & 1001 \\ 13 & 16 & 22 & p \end{pmatrix}$, $p=\mathbf{30}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 11 & 13 & 17 & 19 \\ 37 & 44 & 666 & 1001 \\ 13 & 16 & 22 & p \end{pmatrix}$, $p=\mathbf{26}$

9. Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, natomiast działaniem jest mnożenie modulo 7. Wypisać wszystkie elementy danego rzędu.

a) rząd 6: **3, 5** **b)** rząd 2: **6**

c) rząd 1: **1** **d)** rząd 3: **2, 4**

10. Dla danych liczb a i b podać najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą c o następującej własności: Każdy ideał w pierścieniu $\mathbb{Z}$ zawierający liczby a i b zawiera także liczbę c.

a) $a=600$ $b=1000$, $c=\mathbf{200}$ **b)** $a=42$ $b=70$, $c=\mathbf{14}$

c) $a=75$ $b=125$, $c=\mathbf{25}$ **d)** $a=30$ $b=70$, $c=\mathbf{10}$

11. Rzucamy cztery razy kostką do gry. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że suma liczb oczek wyrzuconych w poszczególnych rzutach jest równa n. Podać w postaci ułamka o mianowniku $1296=6^4$:

a) $P(21)=\mathbf{20}/1296$ **b)** $P(24)=\mathbf{1}/1296$

c) $P(23)=\mathbf{4}/1296$ **d)** $P(22)=\mathbf{10}/1296$

12. W urnie znajduje się jedna kula z liczbą 1, dwie kule z liczbą 2, trzy kule z liczbą 3, ..., n kul z liczbą n. Losujemy z urny jedną kulę. Niech $E(n)$ będzie wartością oczekiwaną liczby napisanej na wylosowanej kuli. Podać w postaci liczby całkowiej lub ułamka nieskracalnego:

a) $E(10)=\mathbf{7}$ **b)** $E(40)=\mathbf{27}$

c) $E(100)=\mathbf{67}$ **d)** $E(7)=\mathbf{5}$

1. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^{p+5}+7}}$, $\boldsymbol{\left(-5,\infty\right)}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^{p+3}+5}}$, $\boldsymbol{\left(-3,\infty\right)}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^{p+2}+3}}$, $\boldsymbol{\left(-2,\infty\right)}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n^{p+7}+11}}$, $\boldsymbol{\left(-7,\infty\right)}$

2. Niech $C(a,b)$ będzie zdefiniowane wzorem $\int\limits_a^b \frac{2\,dx}{x^2+4x} = \ln C(a,b)$.
Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego:

a) $C(2,12) = \mathbf{3/2}$

b) $C(1,5) = \mathbf{5/3}$

c) $C(1,45) = \mathbf{15/7}$

d) $C(5,45) = \mathbf{9/7}$

3. Niech f będzie funkcją określoną wzorem $f(x) = x^{50} \cdot e^{x^5}$. Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(100)}(0) = \mathbf{100!/10!}$

b) $f^{(80)}(0) = \mathbf{80!/6!}$

c) $f^{(70)}(0) = \mathbf{70!/4!}$

d) $f^{(90)}(0) = \mathbf{90!/8!}$

4. Podać wartość całki oznaczonej, gdzie [.] oznacza część całowitą.

a) $\int\limits_0^{200} [x]\,dx = \mathbf{19\,900}$

b) $\int\limits_0^{101} [x]\,dx = \mathbf{5050}$

c) $\int\limits_0^{20} [x]\,dx = \mathbf{190}$

d) $\int\limits_0^{10} [x]\,dx = \mathbf{45}$

5. Podać w możliwe prostej postaci takie wyrażenia A, B, C, D, aby dla każdej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

a) $$\int_1^3 \int_2^{11-3x} f(x,y)\,dy\,dx = \int_A^B \int_C^D f(x,y)\,dx\,dy$$

$A=\mathbf{2}$ $B=\mathbf{8}$ $C=\mathbf{1}$ $D=\mathbf{(11-y)/3}$

b) $$\int_0^2 \int_1^{2x+1} f(x,y)\,dy\,dx = \int_A^B \int_C^D f(x,y)\,dx\,dy$$

$A=\mathbf{1}$ $B=\mathbf{5}$ $C=\mathbf{(y-1)/2}$ $D=\mathbf{2}$

c) $$\int_1^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx = \int_A^B \int_C^D f(x,y)\,dx\,dy$$

$A=\mathbf{0}$ $B=\mathbf{\sqrt{3}}$ $C=\mathbf{1}$ $D=\mathbf{\sqrt{4-y^2}}$

d) $$\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx = \int_A^B \int_C^D f(x,y)\,dx\,dy$$

$A=\mathbf{0}$ $B=\mathbf{2}$ $C=\mathbf{-\sqrt{4-y^2}}$ $D=\mathbf{\sqrt{4-y^2}}$

6. Podać w uproszczonej postaci taką liczbę rzeczywistą dodatnią a, aby liczba zespolona z podanej postaci spełniała równanie $\overline{z}=17z^{-1}$.

a) $z=3+ai$, $a=\mathbf{\sqrt{8}=2\sqrt{2}}$

b) $z=2+ai$, $a=\mathbf{\sqrt{13}}$

c) $z=4+ai$, $a=\mathbf{1}$

d) $z=1+ai$, $a=\mathbf{4}$

7. Rozważamy przestrzeń liniową wielomianów zmiennej x stopnia nie większego od 2023. W tej przestrzeni określamy przekształcenie liniowe F wzorem $F(W(x)) = x \cdot W'(x)$. Dla podanej liczby λ podać niezerowy wektor własny przekształcenia F odpowiadający wartości własnej λ.

a) $\lambda = 1$, $\mathbf{x}$

b) $\lambda = 4$, $\mathbf{x^4}$

c) $\lambda = 27$, $\mathbf{x^{27}}$

d) $\lambda = 256$, $\mathbf{x^{256}}$

8. Dla podanej macierzy wskazać taką wartość parametru p, aby wyznacznik macierzy był równy 0.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 11 & 13 & 17 & 19 \\ 37 & 44 & 666 & 1001 \\ 13 & 16 & 22 & p \end{pmatrix}$, $p = \mathbf{26}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 11 \\ 11 & 13 & 17 & 19 \\ 37 & 44 & 666 & 1001 \\ 13 & 16 & 22 & p \end{pmatrix}$, $p = \mathbf{30}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 11 & 13 & 17 & 23 \\ 37 & 44 & 666 & 1001 \\ 13 & 16 & 22 & p \end{pmatrix}$, $p = \mathbf{30}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 19 \\ 11 & 13 & 17 & 19 \\ 37 & 44 & 666 & 1001 \\ 13 & 16 & 22 & p \end{pmatrix}$, $p = \mathbf{38}$

9. Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, natomiast działaniem jest mnożenie modulo 7. Wypisać wszystkie elementy danego rzędu.

a) rząd 2: **6** **b)** rząd 3: **2, 4**

c) rząd 1: **1** **d)** rząd 6: **3, 5**

10. Dla danych liczb a i b podać najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą c o następującej własności: Każdy ideał w pierścieniu $\mathbb{Z}$ zawierający liczby a i b zawiera także liczbę c.

a) $a=30 \quad b=70, \quad c=\mathbf{10}$ **b)** $a=600 \quad b=1000, \quad c=\mathbf{200}$

c) $a=42 \quad b=70, \quad c=\mathbf{14}$ **d)** $a=75 \quad b=125, \quad c=\mathbf{25}$

11. Rzucamy cztery razy kostką do gry. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że suma liczb oczek wyrzuconych w poszczególnych rzutach jest równa n. Podać w postaci ułamka o mianowniku $1296=6^4$:

a) $P(22)=\mathbf{10}/1296$ **b)** $P(21)=\mathbf{20}/1296$

c) $P(23)=\mathbf{4}/1296$ **d)** $P(24)=\mathbf{1}/1296$

12. W urnie znajduje się jedna kula z liczbą 1, dwie kule z liczbą 2, trzy kule z liczbą 3, ..., n kul z liczbą n. Losujemy z urny jedną kulę. Niech $E(n)$ będzie wartością oczekiwaną liczby napisanej na wylosowanej kuli. Podać w postaci liczby całkowiej lub ułamka nieskracalnego:

a) $E(10)=\mathbf{7}$ **b)** $E(40)=\mathbf{27}$

c) $E(7)=\mathbf{5}$ **d)** $E(100)=\mathbf{67}$

1. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^{p+5}+7}}$, $\boldsymbol{\left(-5, \infty\right)}$ **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^{p+2}+3}}$, $\boldsymbol{\left(-2, \infty\right)}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n^{p+7}+11}}$, $\boldsymbol{\left(-7, \infty\right)}$ **d)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^{p+3}+5}}$, $\boldsymbol{\left(-3, \infty\right)}$

2. Niech $C(a,b)$ będzie zdefiniowane wzorem $\int\limits_a^b \frac{2\,dx}{x^2+4x} = \ln C(a,b)$.
Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego:

a) $C(1,45) = \mathbf{15/7}$ **b)** $C(1,5) = \mathbf{5/3}$

c) $C(2,12) = \mathbf{3/2}$ **d)** $C(5,45) = \mathbf{9/7}$

3. Niech f będzie funkcją określoną wzorem $f(x) = x^{50} \cdot e^{x^5}$. Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(70)}(0) = \mathbf{70!/4!}$ **b)** $f^{(80)}(0) = \mathbf{80!/6!}$

c) $f^{(100)}(0) = \mathbf{100!/10!}$ **d)** $f^{(90)}(0) = \mathbf{90!/8!}$

4. Podać wartość całki oznaczonej, gdzie [.] oznacza część całowitą.

a) $\int\limits_0^{200} [x]\,dx = \mathbf{19\,900}$ **b)** $\int\limits_0^{20} [x]\,dx = \mathbf{190}$

c) $\int\limits_0^{101} [x]\,dx = \mathbf{5050}$ **d)** $\int\limits_0^{10} [x]\,dx = \mathbf{45}$

5. Podać w możliwe prostej postaci takie wyrażenia A, B, C, D, aby dla każdej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

a) $\int\limits_1^2 \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx = \int\limits_A^B \int\limits_C^D f(x,y)\,dx\,dy$

$A=\mathbf{0}$ $\quad B=\mathbf{\sqrt{3}}$ $\quad C=\mathbf{1}$ $\quad D=\sqrt{\mathbf{4-y^2}}$

b) $\int\limits_{-2}^2 \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx = \int\limits_A^B \int\limits_C^D f(x,y)\,dx\,dy$

$A=\mathbf{0}$ $\quad B=\mathbf{2}$ $\quad C=-\sqrt{\mathbf{4-y^2}}$ $\quad D=\sqrt{\mathbf{4-y^2}}$

c) $\int\limits_1^3 \int\limits_2^{11-3x} f(x,y)\,dy\,dx = \int\limits_A^B \int\limits_C^D f(x,y)\,dx\,dy$

$A=\mathbf{2}$ $\quad B=\mathbf{8}$ $\quad C=\mathbf{1}$ $\quad D=\mathbf{(11-y)/3}$

d) $\int\limits_0^2 \int\limits_1^{2x+1} f(x,y)\,dy\,dx = \int\limits_A^B \int\limits_C^D f(x,y)\,dx\,dy$

$A=\mathbf{1}$ $\quad B=\mathbf{5}$ $\quad C=\mathbf{(y-1)/2}$ $\quad D=\mathbf{2}$

6. Podać w uproszczonej postaci taką liczbę rzeczywistą dodatnią a, aby liczba zespolona z podanej postaci spełniała równanie $\overline{z}=17z^{-1}$.

a) $z=3+ai$, $\quad a=\mathbf{\sqrt{8}=2\sqrt{2}}$

b) $z=2+ai$, $\quad a=\mathbf{\sqrt{13}}$

c) $z=4+ai$, $\quad a=\mathbf{1}$

d) $z=1+ai$, $\quad a=\mathbf{4}$

7. Rozważamy przestrzeń liniową wielomianów zmiennej x stopnia nie większego od 2023. W tej przestrzeni określamy przekształcenie liniowe F wzorem $F(W(x))=x\cdot W'(x)$. Dla podanej liczby λ podać niezerowy wektor własny przekształcenia F odpowiadający wartości własnej λ.

a) $\lambda=4$, $\mathbf{x^4}$

b) $\lambda=27$, $\mathbf{x^{27}}$

c) $\lambda=1$, $\mathbf{x}$

d) $\lambda=256$, $\mathbf{x^{256}}$

8. Dla podanej macierzy wskazać taką wartość parametru p, aby wyznacznik macierzy był równy 0.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 19 \\ 11 & 13 & 17 & 19 \\ 37 & 44 & 666 & 1001 \\ 13 & 16 & 22 & p \end{pmatrix}$, $p=\mathbf{38}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 11 \\ 11 & 13 & 17 & 19 \\ 37 & 44 & 666 & 1001 \\ 13 & 16 & 22 & p \end{pmatrix}$, $p=\mathbf{30}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 11 & 13 & 17 & 23 \\ 37 & 44 & 666 & 1001 \\ 13 & 16 & 22 & p \end{pmatrix}$, $p=\mathbf{30}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 11 & 13 & 17 & 19 \\ 37 & 44 & 666 & 1001 \\ 13 & 16 & 22 & p \end{pmatrix}$, $p=\mathbf{26}$

9. Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{1,2,3,4,5,6\}$, natomiast działaniem jest mnożenie modulo 7. Wypisać wszystkie elementy danego rzędu.

a) rząd 2: **6** **b)** rząd 6: **3, 5**

c) rząd 1: **1** **d)** rząd 3: **2, 4**

10. Dla danych liczb a i b podać najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą c o następującej własności: Każdy ideał w pierścieniu $\mathbb{Z}$ zawierający liczby a i b zawiera także liczbę c.

a) $a=75$ $b=125$, $c=\mathbf{25}$ **b)** $a=600$ $b=1000$, $c=\mathbf{200}$

c) $a=42$ $b=70$, $c=\mathbf{14}$ **d)** $a=30$ $b=70$, $c=\mathbf{10}$

11. Rzucamy cztery razy kostką do gry. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że suma liczb oczek wyrzuconych w poszczególnych rzutach jest równa n. Podać w postaci ułamka o mianowniku $1296=6^4$:

a) $P(21)=\mathbf{20}/1296$ **b)** $P(23)=\mathbf{4}/1296$

c) $P(24)=\mathbf{1}/1296$ **d)** $P(22)=\mathbf{10}/1296$

12. W urnie znajduje się jedna kula z liczbą 1, dwie kule z liczbą 2, trzy kule z liczbą 3, ..., n kul z liczbą n. Losujemy z urny jedną kulę. Niech $E(n)$ będzie wartością oczekiwaną liczby napisanej na wylosowanej kuli. Podać w postaci liczby całkowiej lub ułamka nieskracalnego:

a) $E(40)=\mathbf{27}$ **b)** $E(100)=\mathbf{67}$

c) $E(7)=\mathbf{5}$ **d)** $E(10)=\mathbf{7}$

1. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^{p+2}+3}}$, $\boldsymbol{\big(-2,\infty\big)}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n^{p+7}+11}}$, $\boldsymbol{\big(-7,\infty\big)}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^{p+3}+5}}$, $\boldsymbol{\big(-3,\infty\big)}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^{p+5}+7}}$, $\boldsymbol{\big(-5,\infty\big)}$

2. Niech $C(a,b)$ będzie zdefiniowane wzorem $\displaystyle\int\limits_a^b \frac{2\,dx}{x^2+4x} = \ln C(a,b)$.
Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego:

a) $C(1,45) = \mathbf{15/7}$

b) $C(2,12) = \mathbf{3/2}$

c) $C(5,45) = \mathbf{9/7}$

d) $C(1,5) = \mathbf{5/3}$

3. Niech f będzie funkcją określoną wzorem $f(x) = x^{50}\cdot e^{x^5}$. Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(100)}(0) = \mathbf{100!/10!}$

b) $f^{(80)}(0) = \mathbf{80!/6!}$

c) $f^{(90)}(0) = \mathbf{90!/8!}$

d) $f^{(70)}(0) = \mathbf{70!/4!}$

4. Podać wartość całki oznaczonej, gdzie $[.]$ oznacza część całowitą.

a) $\displaystyle\int\limits_0^{200}[x]\,dx = \mathbf{19\,900}$

b) $\displaystyle\int\limits_0^{101}[x]\,dx = \mathbf{5050}$

c) $\displaystyle\int\limits_0^{10}[x]\,dx = \mathbf{45}$

d) $\displaystyle\int\limits_0^{20}[x]\,dx = \mathbf{190}$

5. Podać w możliwe prostej postaci takie wyrażenia A, B, C, D, aby dla każdej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

a) $$\int_1^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx=\int_A^B\int_C^D f(x,y)\,dx\,dy$$

$A=\mathbf{0}$ $B=\sqrt{\mathbf{3}}$ $C=\mathbf{1}$ $D=\sqrt{\mathbf{4-y^2}}$

b) $$\int_{-2}^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx=\int_A^B\int_C^D f(x,y)\,dx\,dy$$

$A=\mathbf{0}$ $B=\mathbf{2}$ $C=-\sqrt{\mathbf{4-y^2}}$ $D=\sqrt{\mathbf{4-y^2}}$

c) $$\int_0^2\int_1^{2x+1} f(x,y)\,dy\,dx=\int_A^B\int_C^D f(x,y)\,dx\,dy$$

$A=\mathbf{1}$ $B=\mathbf{5}$ $C=\mathbf{(y-1)/2}$ $D=\mathbf{2}$

d) $$\int_1^3\int_2^{11-3x} f(x,y)\,dy\,dx=\int_A^B\int_C^D f(x,y)\,dx\,dy$$

$A=\mathbf{2}$ $B=\mathbf{8}$ $C=\mathbf{1}$ $D=\mathbf{(11-y)/3}$

6. Podać w uproszczonej postaci taką liczbę rzeczywistą dodatnią a, aby liczba zespolona z podanej postaci spełniała równanie $\overline{z}=17z^{-1}$.

a) $z=3+ai$, $a=\sqrt{\mathbf{8}}=\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}$ **b)** $z=2+ai$, $a=\sqrt{\mathbf{13}}$

c) $z=4+ai$, $a=\mathbf{1}$ **d)** $z=1+ai$, $a=\mathbf{4}$

7. Rozważamy przestrzeń liniową wielomianów zmiennej x stopnia nie większego od 2023. W tej przestrzeni określamy przekształcenie liniowe F wzorem $F(W(x))=x\cdot W'(x)$. Dla podanej liczby λ podać niezerowy wektor własny przekształcenia F odpowiadający wartości własnej λ.

a) $\lambda=256$, $\mathbf{x^{256}}$

b) $\lambda=4$, $\mathbf{x^{4}}$

c) $\lambda=27$, $\mathbf{x^{27}}$

d) $\lambda=1$, $\mathbf{x}$

8. Dla podanej macierzy wskazać taką wartość parametru p, aby wyznacznik macierzy był równy 0.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 19 \\ 11 & 13 & 17 & 19 \\ 37 & 44 & 666 & 1001 \\ 13 & 16 & 22 & p \end{pmatrix}$, $p=\mathbf{38}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 11 \\ 11 & 13 & 17 & 19 \\ 37 & 44 & 666 & 1001 \\ 13 & 16 & 22 & p \end{pmatrix}$, $p=\mathbf{30}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 11 & 13 & 17 & 23 \\ 37 & 44 & 666 & 1001 \\ 13 & 16 & 22 & p \end{pmatrix}$, $p=\mathbf{30}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 11 & 13 & 17 & 19 \\ 37 & 44 & 666 & 1001 \\ 13 & 16 & 22 & p \end{pmatrix}$, $p=\mathbf{26}$

9. Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, natomiast działaniem jest mnożenie modulo 7. Wypisać wszystkie elementy danego rzędu.

a) rząd 6: **3, 5** **b)** rząd 1: **1**

c) rząd 2: **6** **d)** rząd 3: **2, 4**

10. Dla danych liczb a i b podać najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą c o następującej własności: Każdy ideał w pierścieniu $\mathbb{Z}$ zawierający liczby a i b zawiera także liczbę c.

a) $a=30 \quad b=70, \quad c=\mathbf{10}$ **b)** $a=75 \quad b=125, \quad c=\mathbf{25}$

c) $a=600 \quad b=1000, \quad c=\mathbf{200}$ **d)** $a=42 \quad b=70, \quad c=\mathbf{14}$

11. Rzucamy cztery razy kostką do gry. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że suma liczb oczek wyrzuconych w poszczególnych rzutach jest równa n. Podać w postaci ułamka o mianowniku $1296=6^4$:

a) $P(21)=\mathbf{20}/1296$ **b)** $P(22)=\mathbf{10}/1296$

c) $P(24)=\mathbf{1}/1296$ **d)** $P(23)=\mathbf{4}/1296$

12. W urnie znajduje się jedna kula z liczbą 1, dwie kule z liczbą 2, trzy kule z liczbą 3, ..., n kul z liczbą n. Losujemy z urny jedną kulę. Niech $E(n)$ będzie wartością oczekiwaną liczby napisanej na wylosowanej kuli. Podać w postaci liczby całkowiej lub ułamka nieskracalnego:

a) $E(100)=\mathbf{67}$ **b)** $E(40)=\mathbf{27}$

c) $E(10)=\mathbf{7}$ **d)** $E(7)=\mathbf{5}$

1. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^{p+3}+5}}$, $\boldsymbol{(-3,\infty)}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^{p+2}+3}}$, $\boldsymbol{(-2,\infty)}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^{p+5}+7}}$, $\boldsymbol{(-5,\infty)}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n^{p+7}+11}}$, $\boldsymbol{(-7,\infty)}$

2. Niech $C(a,b)$ będzie zdefiniowane wzorem $\int\limits_a^b \frac{2\,dx}{x^2+4x}=\ln C(a,b)$.
Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego:

a) $C(1,5)=\mathbf{5/3}$

b) $C(5,45)=\mathbf{9/7}$

c) $C(2,12)=\mathbf{3/2}$

d) $C(1,45)=\mathbf{15/7}$

3. Niech f będzie funkcją określoną wzorem $f(x)=x^{50}\cdot e^{x^5}$. Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(90)}(0)=\mathbf{90!/8!}$

b) $f^{(80)}(0)=\mathbf{80!/6!}$

c) $f^{(100)}(0)=\mathbf{100!/10!}$

d) $f^{(70)}(0)=\mathbf{70!/4!}$

4. Podać wartość całki oznaczonej, gdzie [.] oznacza część całowitą.

a) $\int\limits_0^{20}[x]\,dx=\mathbf{190}$

b) $\int\limits_0^{101}[x]\,dx=\mathbf{5050}$

c) $\int\limits_0^{200}[x]\,dx=\mathbf{19\,900}$

d) $\int\limits_0^{10}[x]\,dx=\mathbf{45}$

5. Podać w możliwe prostej postaci takie wyrażenia A, B, C, D, aby dla każdej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

a) $\displaystyle\int\limits_{0}^{2}\int\limits_{1}^{2x+1} f(x,y)\,dy\,dx = \int\limits_{A}^{B}\int\limits_{C}^{D} f(x,y)\,dx\,dy$

$A=\mathbf{1}$ $B=\mathbf{5}$ $C=\mathbf{(y-1)/2}$ $D=\mathbf{2}$

b) $\displaystyle\int\limits_{1}^{3}\int\limits_{2}^{11-3x} f(x,y)\,dy\,dx = \int\limits_{A}^{B}\int\limits_{C}^{D} f(x,y)\,dx\,dy$

$A=\mathbf{2}$ $B=\mathbf{8}$ $C=\mathbf{1}$ $D=\mathbf{(11-y)/3}$

c) $\displaystyle\int\limits_{-2}^{2}\int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx = \int\limits_{A}^{B}\int\limits_{C}^{D} f(x,y)\,dx\,dy$

$A=\mathbf{0}$ $B=\mathbf{2}$ $C=-\sqrt{\mathbf{4-y^2}}$ $D=\sqrt{\mathbf{4-y^2}}$

d) $\displaystyle\int\limits_{1}^{2}\int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx = \int\limits_{A}^{B}\int\limits_{C}^{D} f(x,y)\,dx\,dy$

$A=\mathbf{0}$ $B=\sqrt{\mathbf{3}}$ $C=\mathbf{1}$ $D=\sqrt{\mathbf{4-y^2}}$

6. Podać w uproszczonej postaci taką liczbę rzeczywistą dodatnią a, aby liczba zespolona z podanej postaci spełniała równanie $\overline{z}=17z^{-1}$.

a) $z=2+ai$, $a=\sqrt{\mathbf{13}}$

b) $z=3+ai$, $a=\sqrt{\mathbf{8}}=\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}$

c) $z=4+ai$, $a=\mathbf{1}$

d) $z=1+ai$, $a=\mathbf{4}$

7. Rozważamy przestrzeń liniową wielomianów zmiennej x stopnia nie większego od 2023. W tej przestrzeni określamy przekształcenie liniowe F wzorem $F(W(x)) = x \cdot W'(x)$. Dla podanej liczby λ podać niezerowy wektor własny przekształcenia F odpowiadający wartości własnej λ.

a) $\lambda = 1$, $\mathbf{x}$

b) $\lambda = 256$, $\mathbf{x^{256}}$

c) $\lambda = 27$, $\mathbf{x^{27}}$

d) $\lambda = 4$, $\mathbf{x^{4}}$

8. Dla podanej macierzy wskazać taką wartość parametru p, aby wyznacznik macierzy był równy 0.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 11 & 13 & 17 & 23 \\ 37 & 44 & 666 & 1001 \\ 13 & 16 & 22 & p \end{pmatrix}$, $p = \mathbf{30}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 11 & 13 & 17 & 19 \\ 37 & 44 & 666 & 1001 \\ 13 & 16 & 22 & p \end{pmatrix}$, $p = \mathbf{26}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 11 \\ 11 & 13 & 17 & 19 \\ 37 & 44 & 666 & 1001 \\ 13 & 16 & 22 & p \end{pmatrix}$, $p = \mathbf{30}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 19 \\ 11 & 13 & 17 & 19 \\ 37 & 44 & 666 & 1001 \\ 13 & 16 & 22 & p \end{pmatrix}$, $p = \mathbf{38}$

9. Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{1,2,3,4,5,6\}$, natomiast działaniem jest mnożenie modulo 7. Wypisać wszystkie elementy danego rzędu.

a) rząd 1: **1** **b)** rząd 3: **2, 4**

c) rząd 2: **6** **d)** rząd 6: **3, 5**

10. Dla danych liczb a i b podać najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą c o następującej własności: Każdy ideał w pierścieniu $\mathbb{Z}$ zawierający liczby a i b zawiera także liczbę c.

a) $a=30 \quad b=70, \quad c=\mathbf{10}$ **b)** $a=75 \quad b=125, \quad c=\mathbf{25}$

c) $a=600 \quad b=1000, \quad c=\mathbf{200}$ **d)** $a=42 \quad b=70, \quad c=\mathbf{14}$

11. Rzucamy cztery razy kostką do gry. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że suma liczb oczek wyrzuconych w poszczególnych rzutach jest równa n. Podać w postaci ułamka o mianowniku $1296=6^4$:

a) $P(22)=\mathbf{10}/1296$ **b)** $P(21)=\mathbf{20}/1296$

c) $P(24)=\mathbf{1}/1296$ **d)** $P(23)=\mathbf{4}/1296$

12. W urnie znajduje się jedna kula z liczbą 1, dwie kule z liczbą 2, trzy kule z liczbą 3, ..., n kul z liczbą n. Losujemy z urny jedną kulę. Niech $E(n)$ będzie wartością oczekiwaną liczby napisanej na wylosowanej kuli. Podać w postaci liczby całkowiej lub ułamka nieskracalnego:

a) $E(7)=\mathbf{5}$ **b)** $E(40)=\mathbf{27}$

c) $E(100)=\mathbf{67}$ **d)** $E(10)=\mathbf{7}$

1. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n^{p+7}+11}}$, $\boldsymbol{\left(-7,\infty\right)}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^{p+5}+7}}$, $\boldsymbol{\left(-5,\infty\right)}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^{p+2}+3}}$, $\boldsymbol{\left(-2,\infty\right)}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^{p+3}+5}}$, $\boldsymbol{\left(-3,\infty\right)}$

2. Niech $C(a,b)$ będzie zdefiniowane wzorem $\int\limits_a^b \frac{2\,dx}{x^2+4x}=\ln C(a,b)$.
Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego:

a) $C(5,45)=\mathbf{9/7}$

b) $C(2,12)=\mathbf{3/2}$

c) $C(1,45)=\mathbf{15/7}$

d) $C(1,5)=\mathbf{5/3}$

3. Niech f będzie funkcją określoną wzorem $f(x)=x^{50}\cdot e^{x^5}$. Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(100)}(0)=\mathbf{100!/10!}$

b) $f^{(70)}(0)=\mathbf{70!/4!}$

c) $f^{(90)}(0)=\mathbf{90!/8!}$

d) $f^{(80)}(0)=\mathbf{80!/6!}$

4. Podać wartość całki oznaczonej, gdzie [.] oznacza część całowitą.

a) $\int\limits_0^{101}[x]\,dx=\mathbf{5050}$

b) $\int\limits_0^{10}[x]\,dx=\mathbf{45}$

c) $\int\limits_0^{200}[x]\,dx=\mathbf{19\,900}$

d) $\int\limits_0^{20}[x]\,dx=\mathbf{190}$

5. Podać w możliwe prostej postaci takie wyrażenia A, B, C, D, aby dla każdej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

a) $$\int_1^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx=\int_A^B\int_C^D f(x,y)\,dx\,dy$$

$A=\mathbf{0}$ $B=\mathbf{\sqrt{3}}$ $C=\mathbf{1}$ $D=\sqrt{\mathbf{4-y^2}}$

b) $$\int_0^2\int_1^{2x+1} f(x,y)\,dy\,dx=\int_A^B\int_C^D f(x,y)\,dx\,dy$$

$A=\mathbf{1}$ $B=\mathbf{5}$ $C=\mathbf{(y-1)/2}$ $D=\mathbf{2}$

c) $$\int_{-2}^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx=\int_A^B\int_C^D f(x,y)\,dx\,dy$$

$A=\mathbf{0}$ $B=\mathbf{2}$ $C=-\sqrt{\mathbf{4-y^2}}$ $D=\sqrt{\mathbf{4-y^2}}$

d) $$\int_1^3\int_2^{11-3x} f(x,y)\,dy\,dx=\int_A^B\int_C^D f(x,y)\,dx\,dy$$

$A=\mathbf{2}$ $B=\mathbf{8}$ $C=\mathbf{1}$ $D=\mathbf{(11-y)/3}$

6. Podać w uproszczonej postaci taką liczbę rzeczywistą dodatnią a, aby liczba zespolona z podanej postaci spełniała równanie $\overline{z}=17z^{-1}$.

a) $z=1+ai$, $a=\mathbf{4}$

b) $z=4+ai$, $a=\mathbf{1}$

c) $z=3+ai$, $a=\mathbf{\sqrt{8}=2\sqrt{2}}$

d) $z=2+ai$, $a=\mathbf{\sqrt{13}}$

7. Rozważamy przestrzeń liniową wielomianów zmiennej x stopnia nie większego od 2023. W tej przestrzeni określamy przekształcenie liniowe F wzorem $F(W(x))=x\cdot W'(x)$. Dla podanej liczby λ podać niezerowy wektor własny przekształcenia F odpowiadający wartości własnej λ.

a) $\lambda=27$, $\mathbf{x^{27}}$

b) $\lambda=4$, $\mathbf{x^{4}}$

c) $\lambda=256$, $\mathbf{x^{256}}$

d) $\lambda=1$, $\mathbf{x}$

8. Dla podanej macierzy wskazać taką wartość parametru p, aby wyznacznik macierzy był równy 0.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 11 & 13 & 17 & 23 \\ 37 & 44 & 666 & 1001 \\ 13 & 16 & 22 & p \end{pmatrix}$, $p=\mathbf{30}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 19 \\ 11 & 13 & 17 & 19 \\ 37 & 44 & 666 & 1001 \\ 13 & 16 & 22 & p \end{pmatrix}$, $p=\mathbf{38}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 11 & 13 & 17 & 19 \\ 37 & 44 & 666 & 1001 \\ 13 & 16 & 22 & p \end{pmatrix}$, $p=\mathbf{26}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 11 \\ 11 & 13 & 17 & 19 \\ 37 & 44 & 666 & 1001 \\ 13 & 16 & 22 & p \end{pmatrix}$, $p=\mathbf{30}$

9. Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, natomiast działaniem jest mnożenie modulo 7. Wypisać wszystkie elementy danego rzędu.

a) rząd 2: **6**

b) rząd 6: **3, 5**

c) rząd 3: **2, 4**

d) rząd 1: **1**

10. Dla danych liczb a i b podać najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą c o następującej własności: Każdy ideał w pierścieniu $\mathbb{Z}$ zawierający liczby a i b zawiera także liczbę c.

a) $a=75 \quad b=125, \quad c=\mathbf{25}$

b) $a=600 \quad b=1000, \quad c=\mathbf{200}$

c) $a=30 \quad b=70, \quad c=\mathbf{10}$

d) $a=42 \quad b=70, \quad c=\mathbf{14}$

11. Rzucamy cztery razy kostką do gry. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że suma liczb oczek wyrzuconych w poszczególnych rzutach jest równa n. Podać w postaci ułamka o mianowniku $1296=6^4$:

a) $P(22)=\mathbf{10}/1296$

b) $P(24)=\mathbf{1}/1296$

c) $P(21)=\mathbf{20}/1296$

d) $P(23)=\mathbf{4}/1296$

12. W urnie znajduje się jedna kula z liczbą 1, dwie kule z liczbą 2, trzy kule z liczbą 3, ..., n kul z liczbą n. Losujemy z urny jedną kulę. Niech $E(n)$ będzie wartością oczekiwaną liczby napisanej na wylosowanej kuli. Podać w postaci liczby całkowiej lub ułamka nieskracalnego:

a) $E(100)=\mathbf{67}$

b) $E(7)=\mathbf{5}$

c) $E(10)=\mathbf{7}$

d) $E(40)=\mathbf{27}$