1. Podać wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n}^{4n}\frac{k}{\sqrt{n^4+k}}=$ .... **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2n}^{6n}\frac{k}{\sqrt{n^4+k}}=$ ....

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=3n}^{8n}\frac{k}{\sqrt{n^4+k}}=$ .... **d)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=4n}^{10n}\frac{k}{\sqrt{n^4+k}}=$ ....

2. Niech $f_n(x)=\sqrt[n]{x}$. Podać wartość pochodnej trzeciego rzędu.

a) $f_5'''(1)=$ .... **b)** $f_4'''(1)=$ ....

c) $f_3'''(1)=$ .... **d)** $f_2'''(1)=$ ....

3. Podać w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_{-1}^{0}x^4\sqrt[3]{x^5+1}\,dx=$ .... **b)** $\int\limits_{-1}^{0}x^2\sqrt[3]{x^3+1}\,dx=$ ....

c) $\int\limits_{-1}^{0}x^8\sqrt[3]{x^9+1}\,dx=$ .... **d)** $\int\limits_{-1}^{0}x^6\sqrt[3]{x^7+1}\,dx=$ ....

4. Podać promień zbieżności szeregu potęgowego dla tak dobranej wartości parametru p, aby ten promień był dodatni i skończony.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n)!)^5\cdot(8n)!\cdot x^n}{((4n)!)^p\cdot n^n}$, $p=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $R=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n)!)^3\cdot(4n)!\cdot x^n}{((2n)!)^p\cdot n^n}$, $p=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $R=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n)!)^{11}\cdot(8n)!\cdot x^n}{((2n)!)^p\cdot n^n}$, $p=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $R=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n)!)^{45}\cdot(16n)!\cdot x^n}{((2n)!)^p\cdot n^n}$, $p=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $R=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

5. Podać w możliwie prostej postaci takie wyrażenia A, B, C, D, aby dla każdej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^x f(x,y)\,dy\,dx=\int_A^B\int_C^D f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$

$A=\ldots\ldots\ldots$ $B=\ldots\ldots\ldots$ $C=\ldots\ldots\ldots$ $D=\ldots\ldots\ldots$

b) $\displaystyle\int_0^2\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx=\int_A^B\int_C^D f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$

$A=\ldots\ldots\ldots$ $B=\ldots\ldots\ldots$ $C=\ldots\ldots\ldots$ $D=\ldots\ldots\ldots$

c) $\displaystyle\int_0^1\int_x^1 f(x,y)\,dy\,dx=\int_A^B\int_C^D f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$

$A=\ldots\ldots\ldots$ $B=\ldots\ldots\ldots$ $C=\ldots\ldots\ldots$ $D=\ldots\ldots\ldots$

d) $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx=\int_A^B\int_C^D f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$

$A=\ldots\ldots\ldots$ $B=\ldots\ldots\ldots$ $C=\ldots\ldots\ldots$ $D=\ldots\ldots\ldots$

6. Podać takie liczby rzeczywiste dodatnie a i b, aby liczba zespolona $z=a+bi$ spełniała podane równanie.

a) $z^3=8i$, $a=$ .... , $b=$ ....

b) $z^4=-4$, $a=$ .... , $b=$ ....

c) $z^8=1$, $a=$ .... , $b=$ ....

d) $z^6=1$, $a=$ .... , $b=$ ....

7. Dla podanych liczb a i b wskazać takie liczby c, d i e, aby wektory $(1,2,3,4,5)$, $(1,3,5,7,9)$ i (a,b,c,d,e) były liniowo zależne.

a) $a=0$, $b=4$, $c=$ ...., $d=$ ...., $e=$ ....

b) $a=3$, $b=8$, $c=$ ...., $d=$ ...., $e=$ ....

c) $a=10$, $b=41$, $c=$ ...., $d=$ ...., $e=$ ....

d) $a=7$, $b=5$, $c=$ ...., $d=$ ...., $e=$ ....

8. Dla podanej jednej z liczb x, a, b i c wskazać pozostałe liczby tak, aby wektory $(1,1,-1)$, $(2,3,x)$ i (a,b,c) były parami prostopadłe.

a) $c=1$, $x=$ .... , $a=$ .... , $b=$ ....

b) $b=1$, $x=$ .... , $a=$ .... , $c=$ ....

c) $a=2$, $x=$ .... , $b=$ .... , $c=$ ....

d) $a=8$, $x=$ .... , $b=$ .... , $c=$ ....

9. Dla podanej liczby k podać najmniejszą taką liczbę naturalną n, że w grupie permutacji **parzystych** A_n istnieje element rzędu k.

a) $k=20$, $n=$ .... **b)** $k=16$, $n=$ ....

c) $k=8$, $n=$ .... **d)** $k=18$, $n=$ ....

10. Podać liczbę elementów rzędu 2 w podanej grupie.

a) $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4$, ... **b)** $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4$, ...

c) $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4$, ... **d)** $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4$, ...

11. W urnie znajduje się n kul z kolejnymi liczbami od 1 do n. Losujemy z urny kulę. Niech $E(n)$ będzie wartością oczekiwaną kwadratu liczby napisanej na wylosowanej kuli. Podać w postaci liczby naturalnej lub ułamka nieskracalnego:

a) $E(19)=$ .... **b)** $E(10)=$ ....

c) $E(11)=$ .... **d)** $E(13)=$ ....

12. Rzucamy dwa razy kostką do gry. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że iloczyn liczb oczek wyrzuconych w poszczególnych rzutach jest podzielny przez n. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(3)=$ .... **b)** $P(4)=$ ....

c) $P(5)=$ .... **d)** $P(2)=$ ....