

**EGZAMIN WSTĘPNY (zadania otwarte)**  
**15 lutego 2023 r.**

*Zadanie 1.* Dowieść, że dla każdej liczby rzeczywistej  $x \in (0, 1)$  zachodzi nierówność

$$2^x < 1 + x.$$

*Zadanie 2.* Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x, y) = 5x + 12y$$

na zbiorze

$$\{(x, y) : x^4 + y^4 = 1 - 2x^2y^2\}.$$

Wyznaczyć wszystkie punkty, w których wartości najmniejsza i największa są osiąmane.

*Zadanie 3.* Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$x'' + x = 2e^t, \quad x(0) = x(1) = 1.$$

*Zadanie 4.* Dane są takie macierze nieosobliwe  $A$  i  $B$  rozmiaru  $10 \times 10$  o wyrazach rzeczywistych, że

$$AB = BA \quad \text{oraz} \quad A^2 = B^3.$$

Udowodnić istnienie takiej macierzy  $C$ , że

$$A = C^3 \quad \text{oraz} \quad B = C^2.$$

*Zadanie 5.* Podać przykład grupy skończonej (niekoniecznie przemiennej) rzędu 32, w której liczba elementów rzędu 2 jest równa 17.

*Zadanie 6.* Zawodnik bierze udział w teleturnieju. Prowadzący kładzie na stole 10 zaklejonych kopert i informuje, że w jednej kopercie znajdują się pieniądze, a dziewięć kopert jest pustych.

Zawodnik deklaruje, ile kopert chce wylosować (od 2 do 10). Następnie losuje tyle kopert, ile zadeklarował.

Prowadzący wie, która koperta zawiera pieniądze. Prowadzący wybiera spośród wylosowanych kopert pustą kopertę, otwiera ją i odkłada na bok.

Zawodnik wybiera dla siebie jedną z pozostałych wylosowanych kopert. Jeśli w tej kopercie są pieniądze, zawodnik je wygrywa.

Ile kopert powinien wylosować zawodnik, aby zmaksymalizować prawdopodobieństwo wygranej? Ile jest równe to prawdopodobieństwo?