 Wersja testu **A** 25 lutego 2023 r.

1. Podać wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n}^{4n}\frac{k}{\sqrt{n^4+k}}=\mathbf{15/2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2n}^{6n}\frac{k}{\sqrt{n^4+k}}=\mathbf{16}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=3n}^{8n}\frac{k}{\sqrt{n^4+k}}=\mathbf{55/2}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=4n}^{10n}\frac{k}{\sqrt{n^4+k}}=\mathbf{42}$

2. Niech $f_n(x)=\sqrt[n]{x}$. Podać wartość pochodnej trzeciego rzędu.

a) $f_5'''(1)=\mathbf{36/125}$

b) $f_4'''(1)=\mathbf{21/64}$

c) $f_3'''(1)=\mathbf{10/27}$

d) $f_2'''(1)=\mathbf{3/8}$

3. Podać w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_{-1}^{0}x^4\sqrt[3]{x^5+1}\,dx=\mathbf{3/20}$

b) $\int\limits_{-1}^{0}x^2\sqrt[3]{x^3+1}\,dx=\mathbf{1/4}$

c) $\int\limits_{-1}^{0}x^8\sqrt[3]{x^9+1}\,dx=\mathbf{1/12}$

d) $\int\limits_{-1}^{0}x^6\sqrt[3]{x^7+1}\,dx=\mathbf{3/28}$

4. Podać promień zbieżności szeregu potęgowego dla tak dobranej wartości parametru p, aby ten promień był dodatni i skończony.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{((n)!)^5 \cdot (8n)! \cdot x^n}{((4n)!)^p \cdot n^n}$, $p=\mathbf{3}$, $R=\mathbf{e}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{((n)!)^3 \cdot (4n)! \cdot x^n}{((2n)!)^p \cdot n^n}$, $p=\mathbf{3}$, $R=\mathbf{e/4}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{((n)!)^{11} \cdot (8n)! \cdot x^n}{((2n)!)^p \cdot n^n}$, $p=\mathbf{9}$, $R=\mathbf{e/64}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{((n)!)^{45} \cdot (16n)! \cdot x^n}{((2n)!)^p \cdot n^n}$, $p=\mathbf{30}$, $R=\mathbf{e/16}$

5. Podać w możliwie prostej postaci takie wyrażenia A, B, C, D, aby dla każdej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

a) $$\int\limits_0^1 \int\limits_0^x f(x,y)\,dy\,dx = \int\limits_A^B \int\limits_C^D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\mathbf{0}$ $B=\boldsymbol{\pi/4}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\mathbf{1/\cos}\boldsymbol{\varphi}$

b) $$\int\limits_0^2 \int\limits_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx = \int\limits_A^B \int\limits_C^D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\boldsymbol{-\pi/2}$ $B=\boldsymbol{\pi/2}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\mathbf{2\cos}\boldsymbol{\varphi}$

c) $$\int\limits_0^1 \int\limits_x^1 f(x,y)\,dy\,dx = \int\limits_A^B \int\limits_C^D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\boldsymbol{\pi/4}$ $B=\boldsymbol{\pi/2}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\mathbf{1/\sin}\boldsymbol{\varphi}$

d) $$\int\limits_{-1}^1 \int\limits_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx = \int\limits_A^B \int\limits_C^D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\mathbf{0}$ $B=\boldsymbol{\pi}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\mathbf{2\sin}\boldsymbol{\varphi}$

6. Podać takie liczby rzeczywiste dodatnie a i b, aby liczba zespolona $z=a+bi$ spełniała podane równanie.

a) $z^3=8i$, $a=\boldsymbol{\sqrt{3}}$, $b=\mathbf{1}$

b) $z^4=-4$, $a=\mathbf{1}$, $b=\mathbf{1}$

c) $z^8=1$, $a=\boldsymbol{\sqrt{2}/2}$, $b=\boldsymbol{\sqrt{2}/2}$

d) $z^6=1$, $a=\mathbf{1/2}$, $b=\boldsymbol{\sqrt{3}/2}$

7. Dla podanych liczb a i b wskazać takie liczby c, d i e, aby wektory $(1,2,3,4,5)$, $(1,3,5,7,9)$ i (a,b,c,d,e) były liniowo zależne.

a) $a=0$, $b=4$, $c=\mathbf{8}$, $d=\mathbf{12}$, $e=\mathbf{16}$

b) $a=3$, $b=8$, $c=\mathbf{13}$, $d=\mathbf{18}$, $e=\mathbf{23}$

c) $a=10$, $b=41$, $c=\mathbf{72}$, $d=\mathbf{103}$, $e=\mathbf{134}$

d) $a=7$, $b=5$, $c=\mathbf{3}$, $d=\mathbf{1}$, $e=\mathbf{-1}$

8. Dla podanej jednej z liczb x, a, b i c wskazać pozostałe liczby tak, aby wektory $(1,1,-1)$, $(2,3,x)$ i (a,b,c) były parami prostopadłe.

a) $c=1$, $x=\mathbf{5}$, $a=\mathbf{8}$, $b=\mathbf{-7}$

b) $b=1$, $x=\mathbf{5}$, $a=\mathbf{-8/7}$, $c=\mathbf{-1/7}$

c) $a=2$, $x=\mathbf{5}$, $b=\mathbf{-7/4}$, $c=\mathbf{1/4}$

d) $a=8$, $x=\mathbf{5}$, $b=\mathbf{-7}$, $c=\mathbf{1}$

9. Dla podanej liczby k podać najmniejszą taką liczbę naturalną n, że w grupie permutacji **parzystych** A_n istnieje element rzędu k.

a) $k=20$, $n=\mathbf{11}$ **b)** $k=16$, $n=\mathbf{18}$

c) $k=8$, $n=\mathbf{10}$ **d)** $k=18$, $n=\mathbf{13}$

10. Podać liczbę elementów rzędu 2 w podanej grupie.

a) $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4$, **31** **b)** $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4$, **15**

c) $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4$, **3** **d)** $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4$, **7**

11. W urnie znajduje się n kul z kolejnymi liczbami od 1 do n. Losujemy z urny kulę. Niech $E(n)$ będzie wartością oczekiwaną kwadratu liczby napisanej na wylosowanej kuli. Podać w postaci liczby naturalnej lub ułamka nieskracalnego:

a) $E(19)=\mathbf{130}$ **b)** $E(10)=\mathbf{77/2}$

c) $E(11)=\mathbf{46}$ **d)** $E(13)=\mathbf{63}$

12. Rzucamy dwa razy kostką do gry. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że iloczyn liczb oczek wyrzuconych w poszczególnych rzutach jest podzielny przez n. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(3)=\mathbf{5/9}$ **b)** $P(4)=\mathbf{5/12}$

c) $P(5)=\mathbf{11/36}$ **d)** $P(2)=\mathbf{3/4}$

1. Podać wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=3n}^{8n}\frac{k}{\sqrt{n^4+k}}=\mathbf{55/2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2n}^{6n}\frac{k}{\sqrt{n^4+k}}=\mathbf{16}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n}^{4n}\frac{k}{\sqrt{n^4+k}}=\mathbf{15/2}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=4n}^{10n}\frac{k}{\sqrt{n^4+k}}=\mathbf{42}$

2. Niech $f_n(x)=\sqrt[n]{x}$. Podać wartość pochodnej trzeciego rzędu.

a) $f_2'''(1)=\mathbf{3/8}$

b) $f_3'''(1)=\mathbf{10/27}$

c) $f_5'''(1)=\mathbf{36/125}$

d) $f_4'''(1)=\mathbf{21/64}$

3. Podać w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_{-1}^{0}x^8\sqrt[3]{x^9+1}\,dx=\mathbf{1/12}$

b) $\int\limits_{-1}^{0}x^4\sqrt[3]{x^5+1}\,dx=\mathbf{3/20}$

c) $\int\limits_{-1}^{0}x^2\sqrt[3]{x^3+1}\,dx=\mathbf{1/4}$

d) $\int\limits_{-1}^{0}x^6\sqrt[3]{x^7+1}\,dx=\mathbf{3/28}$

4. Podać promień zbieżności szeregu potęgowego dla tak dobranej wartości parametru p, aby ten promień był dodatni i skończony.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n)!)^5\cdot(8n)!\cdot x^n}{((4n)!)^p\cdot n^n}$, $\quad p=\mathbf{3}$, $\quad R=\mathbf{e}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n)!)^{45}\cdot(16n)!\cdot x^n}{((2n)!)^p\cdot n^n}$, $\quad p=\mathbf{30}$, $\quad R=\mathbf{e/16}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n)!)^{11}\cdot(8n)!\cdot x^n}{((2n)!)^p\cdot n^n}$, $\quad p=\mathbf{9}$, $\quad R=\mathbf{e/64}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n)!)^3\cdot(4n)!\cdot x^n}{((2n)!)^p\cdot n^n}$, $\quad p=\mathbf{3}$, $\quad R=\mathbf{e/4}$

5. Podać w możliwie prostej postaci takie wyrażenia A, B, C, D, aby dla każdej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

a) $$\int_{-1}^{1}\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx=\int_A^B\int_C^D f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\mathbf{0}$ $\quad B=\boldsymbol{\pi}$ $\quad C=\mathbf{0}$ $\quad D=\mathbf{2\sin\boldsymbol{\varphi}}$

b) $$\int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx=\int_A^B\int_C^D f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\mathbf{-\boldsymbol{\pi}/2}$ $\quad B=\mathbf{\boldsymbol{\pi}/2}$ $\quad C=\mathbf{0}$ $\quad D=\mathbf{2\cos\boldsymbol{\varphi}}$

c) $$\int_{0}^{1}\int_{x}^{1} f(x,y)\,dy\,dx=\int_A^B\int_C^D f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\mathbf{\boldsymbol{\pi}/4}$ $\quad B=\mathbf{\boldsymbol{\pi}/2}$ $\quad C=\mathbf{0}$ $\quad D=\mathbf{1/\sin\boldsymbol{\varphi}}$

d) $$\int_{0}^{1}\int_{0}^{x} f(x,y)\,dy\,dx=\int_A^B\int_C^D f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\mathbf{0}$ $\quad B=\mathbf{\boldsymbol{\pi}/4}$ $\quad C=\mathbf{0}$ $\quad D=\mathbf{1/\cos\boldsymbol{\varphi}}$

6. Podać takie liczby rzeczywiste dodatnie a i b, aby liczba zespolona $z=a+bi$ spełniała podane równanie.

a) $z^4=-4$, $a=\mathbf{1}$, $b=\mathbf{1}$

b) $z^6=1$, $a=\mathbf{1/2}$, $b=\boldsymbol{\sqrt{3}/2}$

c) $z^3=8i$, $a=\boldsymbol{\sqrt{3}}$, $b=\mathbf{1}$

d) $z^8=1$, $a=\boldsymbol{\sqrt{2}/2}$, $b=\boldsymbol{\sqrt{2}/2}$

7. Dla podanych liczb a i b wskazać takie liczby c, d i e, aby wektory $(1,2,3,4,5)$, $(1,3,5,7,9)$ i (a,b,c,d,e) były liniowo zależne.

a) $a=0$, $b=4$, $c=\mathbf{8}$, $d=\mathbf{12}$, $e=\mathbf{16}$

b) $a=3$, $b=8$, $c=\mathbf{13}$, $d=\mathbf{18}$, $e=\mathbf{23}$

c) $a=7$, $b=5$, $c=\mathbf{3}$, $d=\mathbf{1}$, $e=\mathbf{-1}$

d) $a=10$, $b=41$, $c=\mathbf{72}$, $d=\mathbf{103}$, $e=\mathbf{134}$

8. Dla podanej jednej z liczb x, a, b i c wskazać pozostałe liczby tak, aby wektory $(1,1,-1)$, $(2,3,x)$ i (a,b,c) były parami prostopadłe.

a) $a=8$, $x=\mathbf{5}$, $b=\mathbf{-7}$, $c=\mathbf{1}$

b) $b=1$, $x=\mathbf{5}$, $a=\mathbf{-8/7}$, $c=\mathbf{-1/7}$

c) $a=2$, $x=\mathbf{5}$, $b=\mathbf{-7/4}$, $c=\mathbf{1/4}$

d) $c=1$, $x=\mathbf{5}$, $a=\mathbf{8}$, $b=\mathbf{-7}$

9. Dla podanej liczby k podać najmniejszą taką liczbę naturalną n, że w grupie permutacji **parzystych** A_n istnieje element rzędu k.

a) $k=16$, $n=$ **18**

b) $k=18$, $n=$ **13**

c) $k=8$, $n=$ **10**

d) $k=20$, $n=$ **11**

10. Podać liczbę elementów rzędu 2 w podanej grupie.

a) $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4$, **7**

b) $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4$, **31**

c) $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4$, **15**

d) $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4$, **3**

11. W urnie znajduje się n kul z kolejnymi liczbami od 1 do n. Losujemy z urny kulę. Niech $E(n)$ będzie wartością oczekiwaną kwadratu liczby napisanej na wylosowanej kuli. Podać w postaci liczby naturalnej lub ułamka nieskracalnego:

a) $E(13)=$ **63**

b) $E(19)=$ **130**

c) $E(11)=$ **46**

d) $E(10)=$ **77/2**

12. Rzucamy dwa razy kostką do gry. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że iloczyn liczb oczek wyrzuconych w poszczególnych rzutach jest podzielny przez n. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(3)=$ **5/9**

b) $P(4)=$ **5/12**

c) $P(2)=$ **3/4**

d) $P(5)=$ **11/36**

1. Podać wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=3n}^{8n}\frac{k}{\sqrt{n^4+k}}=\mathbf{55/2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n}^{4n}\frac{k}{\sqrt{n^4+k}}=\mathbf{15/2}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=4n}^{10n}\frac{k}{\sqrt{n^4+k}}=\mathbf{42}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2n}^{6n}\frac{k}{\sqrt{n^4+k}}=\mathbf{16}$

2. Niech $f_n(x)=\sqrt[n]{x}$. Podać wartość pochodnej trzeciego rzędu.

a) $f_5'''(1)=\mathbf{36/125}$

b) $f_3'''(1)=\mathbf{10/27}$

c) $f_2'''(1)=\mathbf{3/8}$

d) $f_4'''(1)=\mathbf{21/64}$

3. Podać w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_{-1}^{0} x^2\sqrt[3]{x^3+1}\,dx=\mathbf{1/4}$

b) $\int\limits_{-1}^{0} x^4\sqrt[3]{x^5+1}\,dx=\mathbf{3/20}$

c) $\int\limits_{-1}^{0} x^8\sqrt[3]{x^9+1}\,dx=\mathbf{1/12}$

d) $\int\limits_{-1}^{0} x^6\sqrt[3]{x^7+1}\,dx=\mathbf{3/28}$

4. Podać promień zbieżności szeregu potęgowego dla tak dobranej wartości parametru p, aby ten promień był dodatni i skończony.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n)!)^5\cdot(8n)!\cdot x^n}{((4n)!)^p\cdot n^n}$, $\quad p=\mathbf{3}$, $\quad R=\mathbf{e}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n)!)^{11}\cdot(8n)!\cdot x^n}{((2n)!)^p\cdot n^n}$, $\quad p=\mathbf{9}$, $\quad R=\mathbf{e/64}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n)!)^{45}\cdot(16n)!\cdot x^n}{((2n)!)^p\cdot n^n}$, $\quad p=\mathbf{30}$, $\quad R=\mathbf{e/16}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n)!)^3\cdot(4n)!\cdot x^n}{((2n)!)^p\cdot n^n}$, $\quad p=\mathbf{3}$, $\quad R=\mathbf{e/4}$

5. Podać w możliwie prostej postaci takie wyrażenia A, B, C, D, aby dla każdej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

a) $$\int_0^1\int_x^1 f(x,y)\,dy\,dx=\int_A^B\int_C^D f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\boldsymbol{\pi/4}$ $\quad B=\boldsymbol{\pi/2}$ $\quad C=\mathbf{0}$ $\quad D=\mathbf{1/\sin\boldsymbol{\varphi}}$

b) $$\int_0^1\int_0^x f(x,y)\,dy\,dx=\int_A^B\int_C^D f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\mathbf{0}$ $\quad B=\boldsymbol{\pi/4}$ $\quad C=\mathbf{0}$ $\quad D=\mathbf{1/\cos\boldsymbol{\varphi}}$

c) $$\int_{-1}^1\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx=\int_A^B\int_C^D f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\mathbf{0}$ $\quad B=\boldsymbol{\pi}$ $\quad C=\mathbf{0}$ $\quad D=\mathbf{2\,\sin\boldsymbol{\varphi}}$

d) $$\int_0^2\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx=\int_A^B\int_C^D f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\boldsymbol{-\pi/2}$ $\quad B=\boldsymbol{\pi/2}$ $\quad C=\mathbf{0}$ $\quad D=\mathbf{2\,\cos\boldsymbol{\varphi}}$

6. Podać takie liczby rzeczywiste dodatnie a i b, aby liczba zespolona $z=a+bi$ spełniała podane równanie.

a) $z^4=-4$, $a=\mathbf{1}$, $b=\mathbf{1}$

b) $z^6=1$, $a=\mathbf{1/2}$, $b=\mathbf{\sqrt{3}/2}$

c) $z^3=8i$, $a=\mathbf{\sqrt{3}}$, $b=\mathbf{1}$

d) $z^8=1$, $a=\mathbf{\sqrt{2}/2}$, $b=\mathbf{\sqrt{2}/2}$

7. Dla podanych liczb a i b wskazać takie liczby c, d i e, aby wektory $(1,2,3,4,5)$, $(1,3,5,7,9)$ i (a,b,c,d,e) były liniowo zależne.

a) $a=3$, $b=8$, $c=\mathbf{13}$, $d=\mathbf{18}$, $e=\mathbf{23}$

b) $a=7$, $b=5$, $c=\mathbf{3}$, $d=\mathbf{1}$, $e=\mathbf{-1}$

c) $a=0$, $b=4$, $c=\mathbf{8}$, $d=\mathbf{12}$, $e=\mathbf{16}$

d) $a=10$, $b=41$, $c=\mathbf{72}$, $d=\mathbf{103}$, $e=\mathbf{134}$

8. Dla podanej jednej z liczb x, a, b i c wskazać pozostałe liczby tak, aby wektory $(1,1,-1)$, $(2,3,x)$ i (a,b,c) były parami prostopadłe.

a) $c=1$, $x=\mathbf{5}$, $a=\mathbf{8}$, $b=\mathbf{-7}$

b) $b=1$, $x=\mathbf{5}$, $a=\mathbf{-8/7}$, $c=\mathbf{-1/7}$

c) $a=2$, $x=\mathbf{5}$, $b=\mathbf{-7/4}$, $c=\mathbf{1/4}$

d) $a=8$, $x=\mathbf{5}$, $b=\mathbf{-7}$, $c=\mathbf{1}$

9. Dla podanej liczby k podać najmniejszą taką liczbę naturalną n, że w grupie permutacji **parzystych** A_n istnieje element rzędu k.

a) $k=16$, $n=$ **18**

b) $k=20$, $n=$ **11**

c) $k=8$, $n=$ **10**

d) $k=18$, $n=$ **13**

10. Podać liczbę elementów rzędu 2 w podanej grupie.

a) $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4$, **3**

b) $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4$, **31**

c) $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4$, **15**

d) $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4$, **7**

11. W urnie znajduje się n kul z kolejnymi liczbami od 1 do n. Losujemy z urny kulę. Niech $E(n)$ będzie wartością oczekiwaną kwadratu liczby napisanej na wylosowanej kuli. Podać w postaci liczby naturalnej lub ułamka nieskracalnego:

a) $E(19)=$ **130**

b) $E(11)=$ **46**

c) $E(10)=$ **77/2**

d) $E(13)=$ **63**

12. Rzucamy dwa razy kostką do gry. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że iloczyn liczb oczek wyrzuconych w poszczególnych rzutach jest podzielny przez n. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(4)=$ **5/12**

b) $P(5)=$ **11/36**

c) $P(2)=$ **3/4**

d) $P(3)=$ **5/9**

1. Podać wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n}^{4n}\frac{k}{\sqrt{n^4+k}}=\mathbf{15/2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=4n}^{10n}\frac{k}{\sqrt{n^4+k}}=\mathbf{42}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2n}^{6n}\frac{k}{\sqrt{n^4+k}}=\mathbf{16}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=3n}^{8n}\frac{k}{\sqrt{n^4+k}}=\mathbf{55/2}$

2. Niech $f_n(x)=\sqrt[n]{x}$. Podać wartość pochodnej trzeciego rzędu.

a) $f_5'''(1)=\mathbf{36/125}$

b) $f_2'''(1)=\mathbf{3/8}$

c) $f_4'''(1)=\mathbf{21/64}$

d) $f_3'''(1)=\mathbf{10/27}$

3. Podać w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_{-1}^{0}x^8\sqrt[3]{x^9+1}\,dx=\mathbf{1/12}$

b) $\int\limits_{-1}^{0}x^4\sqrt[3]{x^5+1}\,dx=\mathbf{3/20}$

c) $\int\limits_{-1}^{0}x^6\sqrt[3]{x^7+1}\,dx=\mathbf{3/28}$

d) $\int\limits_{-1}^{0}x^2\sqrt[3]{x^3+1}\,dx=\mathbf{1/4}$

4. Podać promień zbieżności szeregu potęgowego dla tak dobranej wartości parametru p, aby ten promień był dodatni i skończony.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n)!)^{5}\cdot(8n)!\cdot x^{n}}{((4n)!)^{p}\cdot n^{n}}$, $p=\mathbf{3}$, $R=\mathbf{e}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n)!)^{45}\cdot(16n)!\cdot x^{n}}{((2n)!)^{p}\cdot n^{n}}$, $p=\mathbf{30}$, $R=\mathbf{e/16}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n)!)^{3}\cdot(4n)!\cdot x^{n}}{((2n)!)^{p}\cdot n^{n}}$, $p=\mathbf{3}$, $R=\mathbf{e/4}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n)!)^{11}\cdot(8n)!\cdot x^{n}}{((2n)!)^{p}\cdot n^{n}}$, $p=\mathbf{9}$, $R=\mathbf{e/64}$

5. Podać w możliwie prostej postaci takie wyrażenia A, B, C, D, aby dla każdej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

a) $$\int_0^1\int_x^1 f(x,y)\,dy\,dx=\int_A^B\int_C^D f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\boldsymbol{\pi/4}$ $B=\boldsymbol{\pi/2}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\mathbf{1/\sin}\boldsymbol{\varphi}$

b) $$\int_0^1\int_0^x f(x,y)\,dy\,dx=\int_A^B\int_C^D f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\mathbf{0}$ $B=\boldsymbol{\pi/4}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\mathbf{1/\cos}\boldsymbol{\varphi}$

c) $$\int_0^2\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx=\int_A^B\int_C^D f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\boldsymbol{-\pi/2}$ $B=\boldsymbol{\pi/2}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\mathbf{2\cos}\boldsymbol{\varphi}$

d) $$\int_{-1}^1\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx=\int_A^B\int_C^D f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\mathbf{0}$ $B=\boldsymbol{\pi}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\mathbf{2\sin}\boldsymbol{\varphi}$

6. Podać takie liczby rzeczywiste dodatnie a i b, aby liczba zespolona $z=a+bi$ spełniała podane równanie.

a) $z^4=-4$, $a=\mathbf{1}$, $b=\mathbf{1}$

b) $z^6=1$, $a=\mathbf{1/2}$, $b=\boldsymbol{\sqrt{3}/2}$

c) $z^3=8i$, $a=\boldsymbol{\sqrt{3}}$, $b=\mathbf{1}$

d) $z^8=1$, $a=\boldsymbol{\sqrt{2}/2}$, $b=\boldsymbol{\sqrt{2}/2}$

7. Dla podanych liczb a i b wskazać takie liczby c, d i e, aby wektory $(1,2,3,4,5)$, $(1,3,5,7,9)$ i (a,b,c,d,e) były liniowo zależne.

a) $a=10$, $b=41$, $c=\mathbf{72}$, $d=\mathbf{103}$, $e=\mathbf{134}$

b) $a=3$, $b=8$, $c=\mathbf{13}$, $d=\mathbf{18}$, $e=\mathbf{23}$

c) $a=7$, $b=5$, $c=\mathbf{3}$, $d=\mathbf{1}$, $e=\mathbf{-1}$

d) $a=0$, $b=4$, $c=\mathbf{8}$, $d=\mathbf{12}$, $e=\mathbf{16}$

8. Dla podanej jednej z liczb x, a, b i c wskazać pozostałe liczby tak, aby wektory $(1,1,-1)$, $(2,3,x)$ i (a,b,c) były parami prostopadłe.

a) $c=1$, $x=\mathbf{5}$, $a=\mathbf{8}$, $b=\mathbf{-7}$

b) $b=1$, $x=\mathbf{5}$, $a=\mathbf{-8/7}$, $c=\mathbf{-1/7}$

c) $a=2$, $x=\mathbf{5}$, $b=\mathbf{-7/4}$, $c=\mathbf{1/4}$

d) $a=8$, $x=\mathbf{5}$, $b=\mathbf{-7}$, $c=\mathbf{1}$

9. Dla podanej liczby k podać najmniejszą taką liczbę naturalną n, że w grupie permutacji **parzystych** A_n istnieje element rzędu k.

a) $k=20$, $n=\mathbf{11}$ **b)** $k=8$, $n=\mathbf{10}$

c) $k=16$, $n=\mathbf{18}$ **d)** $k=18$, $n=\mathbf{13}$

10. Podać liczbę elementów rzędu 2 w podanej grupie.

a) $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4$, **7** **b)** $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4$, **3**

c) $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4$, **31** **d)** $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4$, **15**

11. W urnie znajduje się n kul z kolejnymi liczbami od 1 do n. Losujemy z urny kulę. Niech $E(n)$ będzie wartością oczekiwaną kwadratu liczby napisanej na wylosowanej kuli. Podać w postaci liczby naturalnej lub ułamka nieskracalnego:

a) $E(19)=\mathbf{130}$ **b)** $E(13)=\mathbf{63}$

c) $E(10)=\mathbf{77/2}$ **d)** $E(11)=\mathbf{46}$

12. Rzucamy dwa razy kostką do gry. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że iloczyn liczb oczek wyrzuconych w poszczególnych rzutach jest podzielny przez n. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(5)=\mathbf{11/36}$ **b)** $P(4)=\mathbf{5/12}$

c) $P(3)=\mathbf{5/9}$ **d)** $P(2)=\mathbf{3/4}$