1. Podać kres górny zbioru, gdzie $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych.

a) $\sup\left\{\frac{mn}{4m^2+25n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}=\mathbf{1/20}$

b) $\sup\left\{\frac{mn}{4m^2+49n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}=\mathbf{1/28}$

c) $\sup\left\{\frac{mn}{9m^2+25n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}=\mathbf{1/30}$

d) $\sup\left\{\frac{mn}{9m^2+49n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}=\mathbf{1/42}$

2. Podać wartość granicy.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{6x}-1-6x}{\ln(1+6x^2)}=\mathbf{3}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1-4x}{\ln(1+6x^2)}=\mathbf{4/3}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1-3x}{\ln(1+6x^2)}=\mathbf{3/4}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1-2x}{\ln(1+6x^2)}=\mathbf{1/3}$

3. Podać w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_{-1}^{0} x^4\sqrt{x^5+1}\,dx=\mathbf{2/15}$

b) $\int\limits_{-1}^{0} x^2\sqrt{x^3+1}\,dx=\mathbf{2/9}$

c) $\int\limits_{-1}^{0} x^8\sqrt{x^9+1}\,dx=\mathbf{2/27}$

d) $\int\limits_{-1}^{0} x^6\sqrt{x^7+1}\,dx=\mathbf{2/21}$

4. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny. Bardzo starannie pisać nawiasy określające przynależność końców do przedziału.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(9p-2)^n}{n^2}$, $\boldsymbol{\left[1/9,\, 1/3\right]}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3p-2)^n$, $\boldsymbol{\left(1/3,\, 1\right)}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(5p-2)^n}{\sqrt{n}}$, $\boldsymbol{\left[1/5,\, 3/5\right)}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(7p-2)^n}{n}$, $\boldsymbol{\left[1/7,\, 3/7\right)}$

5. Podać w możliwie prostej postaci takie wyrażenia A, B, C, D, aby dla każdej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

a) $\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{|x|}^{1} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_{A}^{B}\int\limits_{C}^{D} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$

$A=\boldsymbol{\pi/4}$ $B=\boldsymbol{3\pi/4}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\mathbf{1/sin}\boldsymbol{\varphi}$

b) $\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{1}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_{A}^{B}\int\limits_{C}^{D} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$

$A=\boldsymbol{\pi/4}$ $B=\boldsymbol{3\pi/4}$ $C=\mathbf{1/sin}\boldsymbol{\varphi}$ $D=\boldsymbol{\sqrt{2}}$

c) $\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{-x}^{x} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_{A}^{B}\int\limits_{C}^{D} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$

$A=\boldsymbol{-\pi/4}$ $B=\boldsymbol{\pi/4}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\mathbf{1/cos}\boldsymbol{\varphi}$

d) $\int\limits_{1}^{\sqrt{2}}\int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_{A}^{B}\int\limits_{C}^{D} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$

$A=\boldsymbol{-\pi/4}$ $B=\boldsymbol{\pi/4}$ $C=\mathbf{1/cos}\boldsymbol{\varphi}$ $D=\boldsymbol{\sqrt{2}}$

6. Dla podanej liczby a podać taką liczbę rzeczywistą b, aby dla liczby $z_0 = a + bi$ układ równań $|z-1| = |z-i| = |z-z_0|$ nie miał rozwiązań zespolonych z.

a) $a=5, \quad b=\mathbf{-4}$ **b)** $a=4, \quad b=\mathbf{-3}$

c) $a=2, \quad b=\mathbf{-1}$ **d)** $a=3, \quad b=\mathbf{-2}$

7. Podać takie liczby rzeczywiste a, b, aby podana macierz miała wartości własne 0 i 3.

a) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}$ $a=\mathbf{1} \quad b=\mathbf{2}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & a \\ 3 & b \end{pmatrix}$ $a=\mathbf{2/3} \quad b=\mathbf{1}$

c) $\begin{pmatrix} 4 & a \\ 5 & b \end{pmatrix}$ $a=\mathbf{-4/5} \quad b=\mathbf{-1}$

d) $\begin{pmatrix} 3 & a \\ 4 & b \end{pmatrix}$ $a=\mathbf{0} \quad b=\mathbf{0}$

8. Dla podanych liczb a i b wskazać taką liczbę c, aby wektory $(1,2,3)$ i (a,b,c) były prostopadłe.

a) $a=3, \quad b=5, \quad c=\mathbf{-13/3}$ **b)** $a=1, \quad b=1, \quad c=\mathbf{-1}$

c) $a=0, \quad b=1, \quad c=\mathbf{-2/3}$ **d)** $a=1, \quad b=2, \quad c=\mathbf{-5/3}$

9. Dla podanej liczby r podać liczbę elementów rzędu r w grupie $\mathbb{Z}_{210} \times \mathbb{Z}_{210}$.

a) $r=7, \quad$ **48** **b)** $r=3, \quad$ **8**

c) $r=2, \quad$ **3** **d)** $r=5, \quad$ **24**

10. Dla podanych liczb a i b podać zbiór wszystkich takich liczb naturalnych $n \in [a, b]$, że istnieje ciało skończone rzędu n.

a) $a = 40,\ b = 49,\quad n \in \{\mathbf{41, 43, 47, 49}\}$

b) $a = 30,\ b = 39,\quad n \in \{\mathbf{31, 32, 37}\}$

c) $a = 10,\ b = 19,\quad n \in \{\mathbf{11, 13, 16, 17, 19}\}$

d) $a = 20,\ b = 29,\quad n \in \{\mathbf{23, 25, 27, 29}\}$

11. W urnie znajduje się n kul z kolejnymi liczbami od 1 do n. Dwukrotnie losujemy z urny kulę (losowanie ze zwracaniem). Niech $P(n)$ będzie prawdopodobieństwem, że za drugim razem wylosowano kulę z większym numerem niż za pierwszym. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(13) = \mathbf{6/13}$

b) $P(10) = \mathbf{9/20}$

c) $P(11) = \mathbf{5/11}$

d) $P(12) = \mathbf{11/24}$

12. Zdarzenia losowe A, B i C są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A \cap B)$ i $P(A \cap C)$ podać w postaci ułamka nieskracalnego największą możliwą wartość prawdopodobieństwa $P(B \cap C)$.

a) $P(A \cap B) = 1/3,\quad P(A \cap C) = 1/6,\quad P(B \cap C) = \mathbf{1/2}$

b) $P(A \cap B) = 1/4,\quad P(A \cap C) = 1/9,\quad P(B \cap C) = \mathbf{4/9}$

c) $P(A \cap B) = 1/6,\quad P(A \cap C) = 1/12,\quad P(B \cap C) = \mathbf{1/2}$

d) $P(A \cap B) = 1/2,\quad P(A \cap C) = 1/3,\quad P(B \cap C) = \mathbf{2/3}$

1. Podać kres górny zbioru, gdzie $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych.

a) $\sup\left\{\frac{mn}{9m^2+25n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}=\mathbf{1/30}$

b) $\sup\left\{\frac{mn}{4m^2+49n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}=\mathbf{1/28}$

c) $\sup\left\{\frac{mn}{4m^2+25n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}=\mathbf{1/20}$

d) $\sup\left\{\frac{mn}{9m^2+49n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}=\mathbf{1/42}$

2. Podać wartość granicy.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1-2x}{\ln(1+6x^2)}=\mathbf{1/3}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1-3x}{\ln(1+6x^2)}=\mathbf{3/4}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{6x}-1-6x}{\ln(1+6x^2)}=\mathbf{3}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1-4x}{\ln(1+6x^2)}=\mathbf{4/3}$

3. Podać w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_{-1}^{0} x^8\sqrt{x^9+1}\,dx=\mathbf{2/27}$

b) $\int\limits_{-1}^{0} x^4\sqrt{x^5+1}\,dx=\mathbf{2/15}$

c) $\int\limits_{-1}^{0} x^2\sqrt{x^3+1}\,dx=\mathbf{2/9}$

d) $\int\limits_{-1}^{0} x^6\sqrt{x^7+1}\,dx=\mathbf{2/21}$

4. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny. Bardzo starannie pisać nawiasy określające przynależność końców do przedziału.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(9p-2)^n}{n^2}$, $\left[\mathbf{1/9,\,1/3}\right]$ **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(7p-2)^n}{n}$, $\left[\mathbf{1/7,\,3/7}\right)$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(5p-2)^n}{\sqrt{n}}$, $\left[\mathbf{1/5,\,3/5}\right)$ **d)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3p-2)^n$, $\left(\mathbf{1/3,\,1}\right)$

5. Podać w możliwie prostej postaci takie wyrażenia A, B, C, D, aby dla każdej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

a) $$\int\limits_{1}^{\sqrt{2}}\int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_{A}^{B}\int\limits_{C}^{D} f(r\cos\varphi,\,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\boldsymbol{-\pi/4}$ $B=\boldsymbol{\pi/4}$ $C=\boldsymbol{1/\cos\varphi}$ $D=\boldsymbol{\sqrt{2}}$

b) $$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{1}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_{A}^{B}\int\limits_{C}^{D} f(r\cos\varphi,\,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\boldsymbol{\pi/4}$ $B=\boldsymbol{3\pi/4}$ $C=\boldsymbol{1/\sin\varphi}$ $D=\boldsymbol{\sqrt{2}}$

c) $$\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{-x}^{x} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_{A}^{B}\int\limits_{C}^{D} f(r\cos\varphi,\,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\boldsymbol{-\pi/4}$ $B=\boldsymbol{\pi/4}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\boldsymbol{1/\cos\varphi}$

d) $$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{|x|}^{1} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_{A}^{B}\int\limits_{C}^{D} f(r\cos\varphi,\,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\boldsymbol{\pi/4}$ $B=\boldsymbol{3\pi/4}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\boldsymbol{1/\sin\varphi}$

6. Dla podanej liczby a podać taką liczbę rzeczywistą b, aby dla liczby $z_0=a+bi$ układ równań $|z-1|=|z-i|=|z-z_0|$ nie miał rozwiązań zespolonych z.

a) $a=4$, $b=\mathbf{-3}$ **b)** $a=3$, $b=\mathbf{-2}$

c) $a=5$, $b=\mathbf{-4}$ **d)** $a=2$, $b=\mathbf{-1}$

7. Podać takie liczby rzeczywiste a, b, aby podana macierz miała wartości własne 0 i 3.

a) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}$ $a=\mathbf{1}$ $b=\mathbf{2}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & a \\ 3 & b \end{pmatrix}$ $a=\mathbf{2/3}$ $b=\mathbf{1}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & a \\ 4 & b \end{pmatrix}$ $a=\mathbf{0}$ $b=\mathbf{0}$

d) $\begin{pmatrix} 4 & a \\ 5 & b \end{pmatrix}$ $a=\mathbf{-4/5}$ $b=\mathbf{-1}$

8. Dla podanych liczb a i b wskazać taką liczbę c, aby wektory $(1,2,3)$ i (a,b,c) były prostopadłe.

a) $a=1$, $b=2$, $c=\mathbf{-5/3}$ **b)** $a=1$, $b=1$, $c=\mathbf{-1}$

c) $a=0$, $b=1$, $c=\mathbf{-2/3}$ **d)** $a=3$, $b=5$, $c=\mathbf{-13/3}$

9. Dla podanej liczby r podać liczbę elementów rzędu r w grupie $\mathbb{Z}_{210}\times\mathbb{Z}_{210}$.

a) $r=3$, **8** **b)** $r=5$, **24**

c) $r=2$, **3** **d)** $r=7$, **48**

10. Dla podanych liczb a i b podać zbiór wszystkich takich liczb naturalnych $n \in [a, b]$, że istnieje ciało skończone rzędu n.

a) $a = 20$, $b = 29$, $n \in \{\mathbf{23, 25, 27, 29}\}$

b) $a = 40$, $b = 49$, $n \in \{\mathbf{41, 43, 47, 49}\}$

c) $a = 30$, $b = 39$, $n \in \{\mathbf{31, 32, 37}\}$

d) $a = 10$, $b = 19$, $n \in \{\mathbf{11, 13, 16, 17, 19}\}$

11. W urnie znajduje się n kul z kolejnymi liczbami od 1 do n. Dwukrotnie losujemy z urny kulę (losowanie ze zwracaniem). Niech $P(n)$ będzie prawdopodobieństwem, że za drugim razem wylosowano kulę z większym numerem niż za pierwszym. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(12) = \mathbf{11/24}$ **b)** $P(13) = \mathbf{6/13}$

c) $P(11) = \mathbf{5/11}$ **d)** $P(10) = \mathbf{9/20}$

12. Zdarzenia losowe A, B i C są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A \cap B)$ i $P(A \cap C)$ podać w postaci ułamka nieskracalnego największą możliwą wartość prawdopodobieństwa $P(B \cap C)$.

a) $P(A \cap B) = 1/3$, $P(A \cap C) = 1/6$, $P(B \cap C) = \mathbf{1/2}$

b) $P(A \cap B) = 1/4$, $P(A \cap C) = 1/9$, $P(B \cap C) = \mathbf{4/9}$

c) $P(A \cap B) = 1/2$, $P(A \cap C) = 1/3$, $P(B \cap C) = \mathbf{2/3}$

d) $P(A \cap B) = 1/6$, $P(A \cap C) = 1/12$, $P(B \cap C) = \mathbf{1/2}$

1. Podać kres górny zbioru, gdzie $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych.

a) $\sup\left\{\frac{mn}{9m^2+25n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}=\mathbf{1/30}$

b) $\sup\left\{\frac{mn}{4m^2+25n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}=\mathbf{1/20}$

c) $\sup\left\{\frac{mn}{9m^2+49n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}=\mathbf{1/42}$

d) $\sup\left\{\frac{mn}{4m^2+49n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}=\mathbf{1/28}$

2. Podać wartość granicy.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{6x}-1-6x}{\ln(1+6x^2)}=\mathbf{3}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1-3x}{\ln(1+6x^2)}=\mathbf{3/4}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1-2x}{\ln(1+6x^2)}=\mathbf{1/3}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1-4x}{\ln(1+6x^2)}=\mathbf{4/3}$

3. Podać w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_{-1}^{0} x^2\sqrt{x^3+1}\,dx=\mathbf{2/9}$

b) $\int\limits_{-1}^{0} x^4\sqrt{x^5+1}\,dx=\mathbf{2/15}$

c) $\int\limits_{-1}^{0} x^8\sqrt{x^9+1}\,dx=\mathbf{2/27}$

d) $\int\limits_{-1}^{0} x^6\sqrt{x^7+1}\,dx=\mathbf{2/21}$

4. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny. Bardzo starannie pisać nawiasy określające przynależność końców do przedziału.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(9p-2)^n}{n^2}$, $\boldsymbol{\left[1/9,\, 1/3\right]}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5p-2)^n}{\sqrt{n}}$, $\boldsymbol{\left[1/5,\, 3/5\right)}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(7p-2)^n}{n}$, $\boldsymbol{\left[1/7,\, 3/7\right)}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(3p-2)^n$, $\boldsymbol{\left(1/3,\, 1\right)}$

5. Podać w możliwie prostej postaci takie wyrażenia A, B, C, D, aby dla każdej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

a) $$\int_0^1\int_{-x}^{x} f(x,y)\,dy\,dx=\int_A^B\int_C^D f(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\boldsymbol{-\pi/4}$ $B=\boldsymbol{\pi/4}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\boldsymbol{1/\cos\varphi}$

b) $$\int_{-1}^1\int_{|x|}^{1} f(x,y)\,dy\,dx=\int_A^B\int_C^D f(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\boldsymbol{\pi/4}$ $B=\boldsymbol{3\pi/4}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\boldsymbol{1/\sin\varphi}$

c) $$\int_1^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx=\int_A^B\int_C^D f(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\boldsymbol{-\pi/4}$ $B=\boldsymbol{\pi/4}$ $C=\boldsymbol{1/\cos\varphi}$ $D=\boldsymbol{\sqrt{2}}$

d) $$\int_{-1}^1\int_{1}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx=\int_A^B\int_C^D f(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$A=\boldsymbol{\pi/4}$ $B=\boldsymbol{3\pi/4}$ $C=\boldsymbol{1/\sin\varphi}$ $D=\boldsymbol{\sqrt{2}}$

6. Dla podanej liczby a podać taką liczbę rzeczywistą b, aby dla liczby $z_0=a+bi$ układ równań $|z-1|=|z-i|=|z-z_0|$ nie miał rozwiązań zespolonych z.

a) $a=4$, $b=\mathbf{-3}$ **b)** $a=3$, $b=\mathbf{-2}$

c) $a=5$, $b=\mathbf{-4}$ **d)** $a=2$, $b=\mathbf{-1}$

7. Podać takie liczby rzeczywiste a, b, aby podana macierz miała wartości własne 0 i 3.

a) $\begin{pmatrix} 2 & a \\ 3 & b \end{pmatrix}$ $a=\mathbf{2/3}$ $b=\mathbf{1}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & a \\ 4 & b \end{pmatrix}$ $a=\mathbf{0}$ $b=\mathbf{0}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}$ $a=\mathbf{1}$ $b=\mathbf{2}$

d) $\begin{pmatrix} 4 & a \\ 5 & b \end{pmatrix}$ $a=\mathbf{-4/5}$ $b=\mathbf{-1}$

8. Dla podanych liczb a i b wskazać taką liczbę c, aby wektory $(1,2,3)$ i (a,b,c) były prostopadłe.

a) $a=3$, $b=5$, $c=\mathbf{-13/3}$ **b)** $a=1$, $b=1$, $c=\mathbf{-1}$

c) $a=0$, $b=1$, $c=\mathbf{-2/3}$ **d)** $a=1$, $b=2$, $c=\mathbf{-5/3}$

9. Dla podanej liczby r podać liczbę elementów rzędu r w grupie $\mathbb{Z}_{210}\times\mathbb{Z}_{210}$.

a) $r=3$, **8** **b)** $r=7$, **48**

c) $r=2$, **3** **d)** $r=5$, **24**

10. Dla podanych liczb a i b podać zbiór wszystkich takich liczb naturalnych $n \in [a, b]$, że istnieje ciało skończone rzędu n.

a) $a=10$, $b=19$, $n \in \{\mathbf{11, 13, 16, 17, 19}\}$

b) $a=40$, $b=49$, $n \in \{\mathbf{41, 43, 47, 49}\}$

c) $a=30$, $b=39$, $n \in \{\mathbf{31, 32, 37}\}$

d) $a=20$, $b=29$, $n \in \{\mathbf{23, 25, 27, 29}\}$

11. W urnie znajduje się n kul z kolejnymi liczbami od 1 do n. Dwukrotnie losujemy z urny kulę (losowanie ze zwracaniem). Niech $P(n)$ będzie prawdopodobieństwem, że za drugim razem wylosowano kulę z większym numerem niż za pierwszym. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(13) = \mathbf{6/13}$ **b)** $P(11) = \mathbf{5/11}$

c) $P(10) = \mathbf{9/20}$ **d)** $P(12) = \mathbf{11/24}$

12. Zdarzenia losowe A, B i C są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A \cap B)$ i $P(A \cap C)$ podać w postaci ułamka nieskracalnego największą możliwą wartość prawdopodobieństwa $P(B \cap C)$.

a) $P(A \cap B) = 1/4$, $P(A \cap C) = 1/9$, $P(B \cap C) = \mathbf{4/9}$

b) $P(A \cap B) = 1/6$, $P(A \cap C) = 1/12$, $P(B \cap C) = \mathbf{1/2}$

c) $P(A \cap B) = 1/2$, $P(A \cap C) = 1/3$, $P(B \cap C) = \mathbf{2/3}$

d) $P(A \cap B) = 1/3$, $P(A \cap C) = 1/6$, $P(B \cap C) = \mathbf{1/2}$

1. Podać kres górny zbioru, gdzie $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych.

a) $\sup\left\{\frac{mn}{4m^2+25n^2}: m,n\in\mathbb{N}\right\} = \mathbf{1/20}$

b) $\sup\left\{\frac{mn}{9m^2+49n^2}: m,n\in\mathbb{N}\right\} = \mathbf{1/42}$

c) $\sup\left\{\frac{mn}{4m^2+49n^2}: m,n\in\mathbb{N}\right\} = \mathbf{1/28}$

d) $\sup\left\{\frac{mn}{9m^2+25n^2}: m,n\in\mathbb{N}\right\} = \mathbf{1/30}$

2. Podać wartość granicy.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{6x}-1-6x}{\ln(1+6x^2)} = \mathbf{3}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1-2x}{\ln(1+6x^2)} = \mathbf{1/3}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1-4x}{\ln(1+6x^2)} = \mathbf{4/3}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1-3x}{\ln(1+6x^2)} = \mathbf{3/4}$

3. Podać w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_{-1}^{0} x^8\sqrt{x^9+1}\,dx = \mathbf{2/27}$

b) $\int\limits_{-1}^{0} x^4\sqrt{x^5+1}\,dx = \mathbf{2/15}$

c) $\int\limits_{-1}^{0} x^6\sqrt{x^7+1}\,dx = \mathbf{2/21}$

d) $\int\limits_{-1}^{0} x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \mathbf{2/9}$

4. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny. Bardzo starannie pisać nawiasy określające przynależność końców do przedziału.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(9p-2)^n}{n^2}$, $\left[\mathbf{1/9,\ 1/3}\right]$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(7p-2)^n}{n}$, $\left[\mathbf{1/7,\ 3/7}\right)$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (3p-2)^n$, $\left(\mathbf{1/3,\ 1}\right)$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(5p-2)^n}{\sqrt{n}}$, $\left[\mathbf{1/5,\ 3/5}\right)$

5. Podać w możliwie prostej postaci takie wyrażenia A, B, C, D, aby dla każdej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

a) $\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{-x}^{x} f(x,y)\,dy\,dx = \int\limits_{A}^{B}\int\limits_{C}^{D} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$

$A=\boldsymbol{-\pi/4}$ $B=\boldsymbol{\pi/4}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\mathbf{1/\cos}\boldsymbol{\varphi}$

b) $\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{|x|}^{1} f(x,y)\,dy\,dx = \int\limits_{A}^{B}\int\limits_{C}^{D} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$

$A=\boldsymbol{\pi/4}$ $B=\boldsymbol{3\pi/4}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\mathbf{1/\sin}\boldsymbol{\varphi}$

c) $\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{1}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx = \int\limits_{A}^{B}\int\limits_{C}^{D} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$

$A=\boldsymbol{\pi/4}$ $B=\boldsymbol{3\pi/4}$ $C=\mathbf{1/\sin}\boldsymbol{\varphi}$ $D=\boldsymbol{\sqrt{2}}$

d) $\int\limits_{1}^{\sqrt{2}}\int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx = \int\limits_{A}^{B}\int\limits_{C}^{D} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$

$A=\boldsymbol{-\pi/4}$ $B=\boldsymbol{\pi/4}$ $C=\mathbf{1/\cos}\boldsymbol{\varphi}$ $D=\boldsymbol{\sqrt{2}}$

6. Dla podanej liczby a podać taką liczbę rzeczywistą b, aby dla liczby $z_0 = a + bi$ układ równań $|z-1| = |z-i| = |z-z_0|$ nie miał rozwiązań zespolonych z.

a) $a=4$, $b=\mathbf{-3}$ **b)** $a=3$, $b=\mathbf{-2}$

c) $a=5$, $b=\mathbf{-4}$ **d)** $a=2$, $b=\mathbf{-1}$

7. Podać takie liczby rzeczywiste a, b, aby podana macierz miała wartości własne 0 i 3.

a) $\begin{pmatrix} 4 & a \\ 5 & b \end{pmatrix}$ $a=\mathbf{-4/5}$ $b=\mathbf{-1}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & a \\ 3 & b \end{pmatrix}$ $a=\mathbf{2/3}$ $b=\mathbf{1}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & a \\ 4 & b \end{pmatrix}$ $a=\mathbf{0}$ $b=\mathbf{0}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}$ $a=\mathbf{1}$ $b=\mathbf{2}$

8. Dla podanych liczb a i b wskazać taką liczbę c, aby wektory $(1,2,3)$ i (a,b,c) były prostopadłe.

a) $a=3$, $b=5$, $c=\mathbf{-13/3}$ **b)** $a=1$, $b=1$, $c=\mathbf{-1}$

c) $a=0$, $b=1$, $c=\mathbf{-2/3}$ **d)** $a=1$, $b=2$, $c=\mathbf{-5/3}$

9. Dla podanej liczby r podać liczbę elementów rzędu r w grupie $\mathbb{Z}_{210} \times \mathbb{Z}_{210}$.

a) $r=7$, **48** **b)** $r=2$, **3**

c) $r=3$, **8** **d)** $r=5$, **24**

10. Dla podanych liczb a i b podać zbiór wszystkich takich liczb naturalnych $n \in [a, b]$, że istnieje ciało skończone rzędu n.

a) $a = 20,\ b = 29, \quad n \in \{\mathbf{23, 25, 27, 29}\}$

b) $a = 10,\ b = 19, \quad n \in \{\mathbf{11, 13, 16, 17, 19}\}$

c) $a = 40,\ b = 49, \quad n \in \{\mathbf{41, 43, 47, 49}\}$

d) $a = 30,\ b = 39, \quad n \in \{\mathbf{31, 32, 37}\}$

11. W urnie znajduje się n kul z kolejnymi liczbami od 1 do n. Dwukrotnie losujemy z urny kulę (losowanie ze zwracaniem). Niech $P(n)$ będzie prawdopodobieństwem, że za drugim razem wylosowano kulę z większym numerem niż za pierwszym. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(13) = \mathbf{6/13}$ **b)** $P(12) = \mathbf{11/24}$

c) $P(10) = \mathbf{9/20}$ **d)** $P(11) = \mathbf{5/11}$

12. Zdarzenia losowe A, B i C są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A \cap B)$ i $P(A \cap C)$ podać w postaci ułamka nieskracalnego największą możliwą wartość prawdopodobieństwa $P(B \cap C)$.

a) $P(A \cap B) = 1/6, \quad P(A \cap C) = 1/12, \quad P(B \cap C) = \mathbf{1/2}$

b) $P(A \cap B) = 1/4, \quad P(A \cap C) = 1/9, \quad P(B \cap C) = \mathbf{4/9}$

c) $P(A \cap B) = 1/3, \quad P(A \cap C) = 1/6, \quad P(B \cap C) = \mathbf{1/2}$

d) $P(A \cap B) = 1/2, \quad P(A \cap C) = 1/3, \quad P(B \cap C) = \mathbf{2/3}$