EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.02.2023 r.
Matematyka w ekonomii

Zadanie **1. (8 punktów)**

Badacz dysponuje przekrojowymi danymi dla próby n krajów, dotyczącymi zagregowanych wynagrodzeń W, zagregowanych zysków Z i zagregowanych dochodów D. Na mocy definicji:

$$D_i = W_i + Z_i.$$

Badacz metodą klasycznej regresji liniowej dokonał następującej estymacji

$$\widehat{W}_i = \widehat{\alpha}_1 + \widehat{\alpha}_2 D_i,$$
$$\widehat{Z}_i = \widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2 D_i.$$

(i) Pokaż, że współczynniki regresji będą spełniały następujące równania:

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}_2 + \widehat{\beta}_2 &= 1 \\ \widehat{\alpha}_1 + \widehat{\beta}_1 &= 0. \end{aligned}$$

(ii) Wyjaśnij intuicyjnie, dlaczego tak powinno być.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie z gęstością $f(x,\theta) = \theta x^{\theta-1}$, $x \in (0,1)$, $\theta \in (0,+\infty)$. Wyznacz estymator największej wiarogodności parametru θ.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech $\{X_t,\, t \in \mathbb{Z}\}$ będzie procesem AR(1), a więc $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$, gdzie $\{Z_t,\, t \in \mathbb{Z}\}$ jest procesem białego szumu ze średnią zero i wariancją σ^2. Wyznacz wariancję zmiennej losowej

$$Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4,$$

gdy $\phi = 0,9$ i $\sigma^2 = 4$,

Zadanie **4. (8 punktów)**

Linia lotnicza, chcąc zapewnić pełne wypełnienie, sprzedaje więcej biletów na miejsca aniżeli jest ich w samolocie. Według statystyk 5% pasażerów nie pojawia się na odprawie. W samolocie jest 108 miejsc. Jakie jest prawdopodobieństwo, że sprzedając bilety na 110 miejsc nie wszyscy pasażerowie będą mogli polecieć. Zakładając, że pasażerowie podejmują decyzje niezależnie, napisz wzór dokładny na prawdopodobieństwo, że nie zgłosi się k pasażerów (jaki to rozkład), a następnie korzystając z załączonych tablic podaj oszacowanie na prawdopodobieństwo, że zabraknie miejsc. Uzasadnij oszacowanie przez zacytowanie odpowiedniego twierdzenia.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.02.2023 r.
Matematyka teoretyczna

Zadanie **1. (8 punktów)**

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Okręgiem o środku w $x \in X$ i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór

$$\{y \colon d(x, y) = r\}.$$

Niech $Y = \{\langle x, y\rangle \colon x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$. Rozważamy Y jako podprzestrzeń przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^2$.

- Naszkicuj w układzie współrzędnych okrąg o środku w $\langle 0, 0\rangle$ i promieniu 1 w przestrzeni Y.
- Podaj przykład elementu okręgu o środku w f i promieniu 1 w przestrzeni $C[0,1]$ z metryką supremum (gdzie $f(x) = x^2$).
- Podaj przykład przestrzeni metrycznej, w której istnieje okrąg o niepustym wnętrzu.
- Pokaż, że w każdej przestrzeni metrycznej okręgi są domknięte.

Zadanie **2. (8 punktów)**

(a)(2pkt) Podać definicje przestrzeni unitarnej oraz przekształcenia unitarnego.
(b)(2pkt) Dowieść, że zbiór przekształceń unitarnych skończenie wymiarowej przestrzeni unitarnej V stanowi grupę (z operacją składania).
(c)(4pkt) Niech v i w będą wektorami tej samej długości w skończenie wymiarowej przestrzeni unitarnej V. Dowieść, że istnieje unitarne przekształcenie f przestrzeni V, takie, że $f(v) = w$.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Załóżmy, że podzbiór A przestrzeni topologicznej X jest jej (silnym) retraktem deformacyjnym. (Przypomnienie: znaczy to, że istnieje retrakcja deformacyjna X na A, która jest na A identycznościowa). Udowodnij, że wtedy relatywne grupy homologii $H_*(X, A)$ (singularnych, o współczynnikach całkowitych) sa wszystkie zerowe.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Niech $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ będzie zbiorem liczb niewymiernych i niech C oznacza zbiór Cantora. Ustalić, które pary zbiorów z poniższej listy są homeomorficzne:

$$B, \quad C, \quad B \times \mathbb{N}, \quad C \times \mathbb{N}.$$

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.02.2023 r.
Analiza danych

Zadanie 1. (8 punktów)

1. Załóżmy, że chcemy zbadać czy dany email zawiera spam czy nie. Bazujemy tylko na trzech prostych cechach binarnych (Tak /Nie):

   - Cecha 1: w mailu istnieje słowo, które jest w "słowniku słów spamowych" (wcześniej raz zdefiniowanego)
   - Cecha 2: mail zawiera obrazek
   - Cecha 3: nadawca maila był kiedyś na jednej z tzw. "czarnych list".

   Mamy następujące dane uczące:

	Cecha 1	Cecha 2	Cecha 3	Spam?
Email 1	Nie	Tak	Tak	SPAM
Email 2	Tak	Nie	Tak	NIE SPAM
Email 3	Tak	Nie	Nie	SPAM
Email 4	Nie	Tak	Nie	NIE SPAM
Email 5	Tak	Nie	Tak	SPAM

   Mamy nowy email, który ma następujące cechy: $\mathbf{x}$ =(Tak, Tak, Nie). Jak taki email zostanie zaklasyfikowany (jako SPAM czy jako NIE SPAM) używając **naiwnego klasyfikatora bayesowskiego**?

Zadanie 2. (8 punktów)

Niech $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^\mathsf{T} \sim N_2(\mu, \Sigma)$ przy czym $\mu = (2,2)^\mathsf{T}$ oraz $\Sigma = \mathrm{diag}\{1,1\}$. Niech $\mathbf{a} = (1,1)^\mathsf{T}$, $\mathbf{b} = (1,-1)^\mathsf{T}$. Pokaż, że wektory $\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{X}$ oraz $\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{X}$ są wzajemnie niezależne i mają rozkłady normalne. Jaki jest łączny rozkład wektora $(\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{X}, \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{X})^\mathsf{T}$?

Zadanie 3. (8 punktów)

Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $N(\theta, 1)$. W problemie testowania hipotezy $H_0 : \theta = 1$ przeciwko alternatywie $H_1 : \theta \neq 1$, wyznacz test ilorazu wiarogodności rozmiaru $\alpha = 0.05$. Jaka jest moc testu przy alternatywie $\theta = 2$?

Zadanie **4. (8 punktów)**

Linia lotnicza, chcąc zapewnić pełne wypełnienie, sprzedaje więcej biletów na miejsca aniżeli jest ich w samolocie. Według statystyk 5% pasażerów nie pojawia się na odprawie. W samolocie jest 108 miejsc. Jakie jest prawdopodobieństwo, że sprzedając bilety na 110 miejsc nie wszyscy pasażerowie będą mogli polecieć. Zakładając, że pasażerowie podejmują decyzje niezależnie, napisz wzór dokładny na prawdopodobieństwo, że nie zgłosi się k pasażerów (jaki to rozkład), a następnie korzystając z załączonych tablic podaj oszacowanie na prawdopodobieństwo, że zabraknie miejsc. Uzasadnij oszacowanie przez zacytowanie odpowiedniego twierdzenia.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.02.2023 r.
Aktuarialno-finansowa

Zadanie **1. (8 punktów)**

Niech X_i, $i = 1, 2, 3, ...$ będzie ciągiem wzajemnie niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, wartości oczekiwanej $E(X_i) = 0$ oraz wariancji $Var(X_i) = \sigma^2 > 0$. Znaleźć wszystkie $\theta \in \mathbb{R}$, dla których proces stochastyczny $\{Y_k : k = 1, 2, 3, ...\}$ jest martyngałem, gdzie

$$Y_k = \left(\sum_{i=1}^{k} X_i \right)^2 - \theta k.$$

Odpowiedź uzasadnić.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Linia lotnicza, chcąc zapewnić pełne wypełnienie, sprzedaje więcej biletów na miejsca aniżeli jest ich w samolocie. Według statystyk 5% pasażerów nie pojawia się na odprawie. W samolocie jest 108 miejsc. Jakie jest prawdopodobieństwo, że sprzedając bilety na 110 miejsc nie wszyscy pasażerowie będą mogli polecieć. Zakładając, że pasażerowie podejmują decyzje niezależnie, napisz wzór dokładny na prawdopodobieństwo, że nie zgłosi się k pasażerów (jaki to rozkład), a następnie korzystając z załączonych tablic podaj oszacowanie na prawdopodobieństwo, że zabraknie miejsc. Uzasadnij oszacowanie przez zacytowanie odpowiedniego twierdzenia.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Model ciągły. Niech $R(t)$ będzie procesem nadwyżki ubezpieczyciela

$$R(t) = u + ct - \sum^{N(t)} Y_i,$$

gdzie:

- $S(t)$ jest złożonym procesem Poissona z parametrem częstotliwości λ,

- wartość pojedynczej szkody Y ma rozkład wykładniczy $Exp(\beta)$,
- składka c zawiera współczynnik bezpieczeństwa $\theta = 0.2$, co zapewnia, iż prawdopodobieństwo ruiny: $\Psi(u) = \frac{1}{10}$.

Udziałowcy zwiększyli nadwyżkę początkową dwukrotnie - do wysokości $2 \cdot u$. Zakładając, iż wszystkie pozostałe parametry procesu nie uległy zmianie, wylicz prawdopodobieństwo ruiny.

Zadanie 4. **(8 punktów)**

Rozważmy portfel złożony z dwóch opcji europejskich waniliowych na to samo aktywo bazowe (akcję niewypłacającą dywidendy), o tej samej zapadalności T i cenie wykonania K. Jedna z nich to opcja kupna, którą posiadamy w pozycji krótkiej, a druga to opcja sprzedaży, którą posiadamy w pozycji długiej. Załóżmy, że $T = 2$ oraz że efektywna roczna stopa procentowa wolna od ryzyka wynosi $r = 0.06$. Wyznacz K wiedząc, że wartość tego portfela w chwili 0 jest równa 0, a cena spot aktywa bazowego wynosi $S_0 = 100$. Narysuj również payoff tego portfela.