1. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna. Bardzo starannie pisać nawiasy określające przynależność końców do przedziału.

a) $\int\limits_0^\infty \frac{x^p}{x^4+x^2}\,dx$, ... **b)** $\int\limits_0^\infty \frac{x^p}{x^9+x^3}\,dx$, ...

c) $\int\limits_0^\infty \frac{x^p}{x^{16}+x^5}\,dx$, ... **d)** $\int\limits_0^\infty \frac{x^p}{x^{25}+x^7}\,dx$, ...

2. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą określoną wzorem

$$f(x)=\frac{e^x-x-1}{x^2}$$

dla $x\neq 0$. Podać wartość funkcji oraz wartości pochodnych podanych rzędów funkcji f w punkcie 0.

a) $f'''(0)=$ .... **b)** $f''(0)=$ ....

c) $f'(0)=$ .... **d)** $f(0)=$ ....

3. Podać promień zbieżności szeregu potęgowego.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!\cdot x^n}{n^{2n}}$, $R=$ .... **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\cdot x^n}{n^n}$, $R=$ ....

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(4n)!\cdot x^n}{n^{4n}}$, $R=$ .... **d)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!\cdot x^n}{n^{3n}}$, $R=$ ....

4. Podać wartość całki iterowanej.

a) $\int\limits_{-4}^{4}\int\limits_{|x|}^{\sqrt{32-x^2}} 5\,dy\,dx =$ .... **b)** $\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}} 2\,dy\,dx =$ ....

c) $\int\limits_{-2}^{2}\int\limits_{|x|}^{\sqrt{8-x^2}} 3\,dy\,dx =$ .... **d)** $\int\limits_{-3}^{3}\int\limits_{|x|}^{\sqrt{18-x^2}} 4\,dy\,dx =$ ....

5. Niech $C(a,b)$ będzie zdefiniowane wzorem

$$\int\limits_{a}^{b}\frac{dx}{(x+2)\cdot(x+3)} = \ln C(a,b)\,.$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego:

a) $C(1,4) =$ .... **b)** $C(3,6) =$ ....

c) $C(2,5) =$ .... **d)** $C(4,7) =$ ....

6. Podać taką liczbę rzeczywistą a, że liczby zespolone z_1 oraz z_2 mają równe argumenty

a) $z_1 = 2+3i$, $z_2 = 5+ai$, $a =$ ....

b) $z_1 = 2+3i$, $z_2 = a+7i$, $a =$ ....

c) $z_1 = a+3i$, $z_2 = 5+7i$, $a =$ ....

d) $z_1 = 2+ai$, $z_2 = 5+7i$, $a =$ ....

7. Dla podanej macierzy wypisać w kolejności niemalejącej jej wartości własne (z uwzględnieniem krotności).

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ .... **b)** $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ ....

c) $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ .... **d)** $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ ....

8. Podać w postaci ułamka nieskracalnego cosinus kąta między wektorami v_1 i v_2.

a) $v_1=(1,2,2)$, $v_2=(6,3,2)$, $\cos(v_1,v_2)=$ ....

b) $v_1=(1,2,2)$, $v_2=(2,3,6)$, $\cos(v_1,v_2)=$ ....

c) $v_1=(1,2,2)$, $v_2=(-2,2,1)$, $\cos(v_1,v_2)=$ ....

d) $v_1=(1,2,2)$, $v_2=(2,2,1)$, $\cos(v_1,v_2)=$ ....

9. Dla podanej liczby r podać największą taką liczbę naturalną n, że zbiór jednoelementowy $\{r\}$ z mnożeniem modulo n jest grupą.

a) $r=7$, $n=$ .... **b)** $r=5$, $n=$ ....

c) $r=4$, $n=$ .... **d)** $r=6$, $n=$ ....

10. Dla podanych rzędów elementów a i b grupy abelowej podać największy możliwy rząd elementu ab.

a) $r(a)=14$, $r(b)=21$, $r(ab)=$ ....

b) $r(a)=10$, $r(b)=14$, $r(ab)=$ ....

c) $r(a)=6$, $r(b)=10$, $r(ab)=$ ....

d) $r(a)=6$, $r(b)=15$, $r(ab)=$ ....

11. Zdarzenia losowe A, B i C są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A\cap B)$ i $P(A\cap C)$ podać w postaci ułamka nieskracalnego największą możliwą wartość, jaką może przyjmować $P(B\cap C)$.

a) $P(A\cap B)=1/4$, $P(A\cap C)=1/8$, $P(B\cap C)=$ ....

b) $P(A\cap B)=1/2$, $P(A\cap C)=1/3$, $P(B\cap C)=$ ....

c) $P(A\cap B)=1/2$, $P(A\cap C)=1/4$, $P(B\cap C)=$ ....

d) $P(A\cap B)=1/3$, $P(A\cap C)=1/5$, $P(B\cap C)=$ ....

12. W urnie znajduje się 10 kul z kolejnymi liczbami od 1 do 10. Losujemy z urny dwie kule (losowanie bez zwracania). Niech $P(n)$ będzie prawdopodobieństwem, że suma liczb napisanych na wylosowanych kulach jest równa n. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(18)=$ .... **b)** $P(17)=$ ....

c) $P(14)=$ .... **d)** $P(19)=$ ....