1. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna. Bardzo starannie pisać nawiasy określające przynależność końców do przedziału.

a) $\int\limits_0^\infty \frac{x^p}{x^4+x^2}\,dx$, $(\mathbf{1}, \mathbf{3})$

b) $\int\limits_0^\infty \frac{x^p}{x^9+x^3}\,dx$, $(\mathbf{2}, \mathbf{8})$

c) $\int\limits_0^\infty \frac{x^p}{x^{16}+x^5}\,dx$, $(\mathbf{4}, \mathbf{15})$

d) $\int\limits_0^\infty \frac{x^p}{x^{25}+x^7}\,dx$, $(\mathbf{6}, \mathbf{24})$

2. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą określoną wzorem

$$f(x)=\frac{e^x-x-1}{x^2}$$

dla $x\neq 0$. Podać wartość funkcji oraz wartości pochodnych podanych rzędów funkcji f w punkcie 0.

a) $f'''(0)=\mathbf{1/20}$

b) $f''(0)=\mathbf{1/12}$

c) $f'(0)=\mathbf{1/6}$

d) $f(0)=\mathbf{1/2}$

3. Podać promień zbieżności szeregu potęgowego.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!\cdot x^n}{n^{2n}}$, $R=\mathbf{e^2/4}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\cdot x^n}{n^{n}}$, $R=\mathbf{e}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(4n)!\cdot x^n}{n^{4n}}$, $R=\mathbf{e^4/256}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!\cdot x^n}{n^{3n}}$, $R=\mathbf{e^3/27}$

4. Podać wartość całki iterowanej.

a) $\int\limits_{-4}^{4}\int\limits_{|x|}^{\sqrt{32-x^2}} 5\,dy\,dx = \mathbf{40\pi}$

b) $\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}} 2\,dy\,dx = \boldsymbol{\pi}$

c) $\int\limits_{-2}^{2}\int\limits_{|x|}^{\sqrt{8-x^2}} 3\,dy\,dx = \mathbf{6\pi}$

d) $\int\limits_{-3}^{3}\int\limits_{|x|}^{\sqrt{18-x^2}} 4\,dy\,dx = \mathbf{18\pi}$

5. Niech $C(a,b)$ będzie zdefiniowane wzorem

$$\int\limits_{a}^{b}\frac{dx}{(x+2)\cdot(x+3)} = \ln C(a,b)\,.$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego:

a) $C(1,4) = \mathbf{8/7}$

b) $C(3,6) = \mathbf{16/15}$

c) $C(2,5) = \mathbf{35/32}$

d) $C(4,7) = \mathbf{21/20}$

6. Podać taką liczbę rzeczywistą a, że liczby zespolone z_1 oraz z_2 mają równe argumenty

a) $z_1 = 2+3i,\quad z_2 = 5+ai,\qquad a = \mathbf{15/2}$

b) $z_1 = 2+3i,\quad z_2 = a+7i,\qquad a = \mathbf{14/3}$

c) $z_1 = a+3i,\quad z_2 = 5+7i,\qquad a = \mathbf{15/7}$

d) $z_1 = 2+ai,\quad z_2 = 5+7i,\qquad a = \mathbf{14/5}$

7. Dla podanej macierzy wypisać w kolejności niemalejącej jej wartości własne (z uwzględnieniem krotności).

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ **1, 2, 4, 5**

b) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ **2, 3, 5, 6**

c) $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ **4, 5, 7, 8**

d) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ **3, 4, 6, 7**

8. Podać w postaci ułamka nieskracalnego cosinus kąta między wektorami v_1 i v_2.

a) $v_1 = (1,2,2)$, $v_2 = (6,3,2)$, $\cos(v_1, v_2) = \mathbf{16/21}$

b) $v_1 = (1,2,2)$, $v_2 = (2,3,6)$, $\cos(v_1, v_2) = \mathbf{20/21}$

c) $v_1 = (1,2,2)$, $v_2 = (-2,2,1)$, $\cos(v_1, v_2) = \mathbf{4/9}$

d) $v_1 = (1,2,2)$, $v_2 = (2,2,1)$, $\cos(v_1, v_2) = \mathbf{8/9}$

9. Dla podanej liczby r podać największą taką liczbę naturalną n, że zbiór jednoelementowy $\{r\}$ z mnożeniem modulo n jest grupą.

a) $r = 7$, $n = \mathbf{42}$

b) $r = 5$, $n = \mathbf{20}$

c) $r = 4$, $n = \mathbf{12}$

d) $r = 6$, $n = \mathbf{30}$

10. Dla podanych rzędów elementów a i b grupy abelowej podać największy możliwy rząd elementu ab.

a) $r(a)=14$, $r(b)=21$, $r(ab)=\mathbf{42}$

b) $r(a)=10$, $r(b)=14$, $r(ab)=\mathbf{70}$

c) $r(a)=6$, $r(b)=10$, $r(ab)=\mathbf{30}$

d) $r(a)=6$, $r(b)=15$, $r(ab)=\mathbf{30}$

11. Zdarzenia losowe A, B i C są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A\cap B)$ i $P(A\cap C)$ podać w postaci ułamka nieskracalnego największą możliwą wartość, jaką może przyjmować $P(B\cap C)$.

a) $P(A\cap B)=1/4$, $P(A\cap C)=1/8$, $P(B\cap C)=\mathbf{1/2}$

b) $P(A\cap B)=1/2$, $P(A\cap C)=1/3$, $P(B\cap C)=\mathbf{2/3}$

c) $P(A\cap B)=1/2$, $P(A\cap C)=1/4$, $P(B\cap C)=\mathbf{1/2}$

d) $P(A\cap B)=1/3$, $P(A\cap C)=1/5$, $P(B\cap C)=\mathbf{3/5}$

12. W urnie znajduje się 10 kul z kolejnymi liczbami od 1 do 10. Losujemy z urny dwie kule (losowanie bez zwracania). Niech $P(n)$ będzie prawdopodobieństwem, że suma liczb napisanych na wylosowanych kulach jest równa n. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(18)=\mathbf{1/45}$ **b)** $P(17)=\mathbf{2/45}$

c) $P(14)=\mathbf{1/15}$ **d)** $P(19)=\mathbf{1/45}$

1. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna. Bardzo starannie pisać nawiasy określające przynależność końców do przedziału.

a) $\int\limits_0^\infty \frac{x^p}{x^{16}+x^5}\,dx$, $(\mathbf{4},\mathbf{15})$

b) $\int\limits_0^\infty \frac{x^p}{x^{9}+x^3}\,dx$, $(\mathbf{2},\mathbf{8})$

c) $\int\limits_0^\infty \frac{x^p}{x^{4}+x^2}\,dx$, $(\mathbf{1},\mathbf{3})$

d) $\int\limits_0^\infty \frac{x^p}{x^{25}+x^7}\,dx$, $(\mathbf{6},\mathbf{24})$

2. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą określoną wzorem

$$f(x)=\frac{e^x-x-1}{x^2}$$

dla $x\neq 0$. Podać wartość funkcji oraz wartości pochodnych podanych rzędów funkcji f w punkcie 0.

a) $f(0)=\mathbf{1/2}$

b) $f'(0)=\mathbf{1/6}$

c) $f'''(0)=\mathbf{1/20}$

d) $f''(0)=\mathbf{1/12}$

3. Podać promień zbieżności szeregu potęgowego.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(4n)!\cdot x^n}{n^{4n}}$, $R=\mathbf{e^4/256}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!\cdot x^n}{n^{2n}}$, $R=\mathbf{e^2/4}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\cdot x^n}{n^{n}}$, $R=\mathbf{e}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!\cdot x^n}{n^{3n}}$, $R=\mathbf{e^3/27}$

4. Podać wartość całki iterowanej.

a) $\int\limits_{-4}^{4}\int\limits_{|x|}^{\sqrt{32-x^2}} 5\,dy\,dx = \mathbf{40\pi}$

b) $\int\limits_{-3}^{3}\int\limits_{|x|}^{\sqrt{18-x^2}} 4\,dy\,dx = \mathbf{18\pi}$

c) $\int\limits_{-2}^{2}\int\limits_{|x|}^{\sqrt{8-x^2}} 3\,dy\,dx = \mathbf{6\pi}$

d) $\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}} 2\,dy\,dx = \boldsymbol{\pi}$

5. Niech $C(a,b)$ będzie zdefiniowane wzorem

$$\int\limits_{a}^{b} \frac{dx}{(x+2)\cdot(x+3)} = \ln C(a,b)\,.$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego:

a) $C(4,7) = \mathbf{21/20}$

b) $C(3,6) = \mathbf{16/15}$

c) $C(2,5) = \mathbf{35/32}$

d) $C(1,4) = \mathbf{8/7}$

6. Podać taką liczbę rzeczywistą a, że liczby zespolone z_1 oraz z_2 mają równe argumenty

a) $z_1 = 2+3i, \quad z_2 = a+7i, \qquad a = \mathbf{14/3}$

b) $z_1 = 2+ai, \quad z_2 = 5+7i, \qquad a = \mathbf{14/5}$

c) $z_1 = 2+3i, \quad z_2 = 5+ai, \qquad a = \mathbf{15/2}$

d) $z_1 = a+3i, \quad z_2 = 5+7i, \qquad a = \mathbf{15/7}$

7. Dla podanej macierzy wypisać w kolejności niemalejącej jej wartości własne (z uwzględnieniem krotności).

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ **1, 2, 4, 5**

b) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ **2, 3, 5, 6**

c) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ **3, 4, 6, 7**

d) $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ **4, 5, 7, 8**

8. Podać w postaci ułamka nieskracalnego cosinus kąta między wektorami v_1 i v_2.

a) $v_1 = (1,2,2), \quad v_2 = (2,2,1), \quad \cos(v_1, v_2) = \mathbf{8/9}$

b) $v_1 = (1,2,2), \quad v_2 = (2,3,6), \quad \cos(v_1, v_2) = \mathbf{20/21}$

c) $v_1 = (1,2,2), \quad v_2 = (-2,2,1), \quad \cos(v_1, v_2) = \mathbf{4/9}$

d) $v_1 = (1,2,2), \quad v_2 = (6,3,2), \quad \cos(v_1, v_2) = \mathbf{16/21}$

9. Dla podanej liczby r podać największą taką liczbę naturalną n, że zbiór jednoelementowy $\{r\}$ z mnożeniem modulo n jest grupą.

a) $r = 5, \quad n = \mathbf{20}$

b) $r = 6, \quad n = \mathbf{30}$

c) $r = 4, \quad n = \mathbf{12}$

d) $r = 7, \quad n = \mathbf{42}$

10. Dla podanych rzędów elementów a i b grupy abelowej podać największy możliwy rząd elementu ab.

a) $r(a)=6$, $r(b)=15$, $r(ab)=\mathbf{30}$

b) $r(a)=14$, $r(b)=21$, $r(ab)=\mathbf{42}$

c) $r(a)=10$, $r(b)=14$, $r(ab)=\mathbf{70}$

d) $r(a)=6$, $r(b)=10$, $r(ab)=\mathbf{30}$

11. Zdarzenia losowe A, B i C są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A\cap B)$ i $P(A\cap C)$ podać w postaci ułamka nieskracalnego największą możliwą wartość, jaką może przyjmować $P(B\cap C)$.

a) $P(A\cap B)=1/3$, $P(A\cap C)=1/5$, $P(B\cap C)=\mathbf{3/5}$

b) $P(A\cap B)=1/4$, $P(A\cap C)=1/8$, $P(B\cap C)=\mathbf{1/2}$

c) $P(A\cap B)=1/2$, $P(A\cap C)=1/4$, $P(B\cap C)=\mathbf{1/2}$

d) $P(A\cap B)=1/2$, $P(A\cap C)=1/3$, $P(B\cap C)=\mathbf{2/3}$

12. W urnie znajduje się 10 kul z kolejnymi liczbami od 1 do 10. Losujemy z urny dwie kule (losowanie bez zwracania). Niech $P(n)$ będzie prawdopodobieństwem, że suma liczb napisanych na wylosowanych kulach jest równa n. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(18)=\mathbf{1/45}$

b) $P(17)=\mathbf{2/45}$

c) $P(19)=\mathbf{1/45}$

d) $P(14)=\mathbf{1/15}$

1. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna. Bardzo starannie pisać nawiasy określające przynależność końców do przedziału.

a) $\int\limits_0^\infty \frac{x^p}{x^{16}+x^5}\,dx$, $\mathbf{(4,15)}$

b) $\int\limits_0^\infty \frac{x^p}{x^4+x^2}\,dx$, $\mathbf{(1,3)}$

c) $\int\limits_0^\infty \frac{x^p}{x^{25}+x^7}\,dx$, $\mathbf{(6,24)}$

d) $\int\limits_0^\infty \frac{x^p}{x^9+x^3}\,dx$, $\mathbf{(2,8)}$

2. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą określoną wzorem

$$f(x)=\frac{e^x-x-1}{x^2}$$

dla $x\neq 0$. Podać wartość funkcji oraz wartości pochodnych podanych rzędów funkcji f w punkcie 0.

a) $f'''(0)=\mathbf{1/20}$

b) $f'(0)=\mathbf{1/6}$

c) $f(0)=\mathbf{1/2}$

d) $f''(0)=\mathbf{1/12}$

3. Podać promień zbieżności szeregu potęgowego.

a) $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{n!\cdot x^n}{n^n}$, $R=\mathbf{e}$

b) $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{(2n)!\cdot x^n}{n^{2n}}$, $R=\mathbf{e^2/4}$

c) $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{(4n)!\cdot x^n}{n^{4n}}$, $R=\mathbf{e^4/256}$

d) $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{(3n)!\cdot x^n}{n^{3n}}$, $R=\mathbf{e^3/27}$

4. Podać wartość całki iterowanej.

a) $\int\limits_{-4}^{4}\int\limits_{|x|}^{\sqrt{32-x^2}} 5\,dy\,dx = \mathbf{40\pi}$ **b)** $\int\limits_{-2}^{2}\int\limits_{|x|}^{\sqrt{8-x^2}} 3\,dy\,dx = \mathbf{6\pi}$

c) $\int\limits_{-3}^{3}\int\limits_{|x|}^{\sqrt{18-x^2}} 4\,dy\,dx = \mathbf{18\pi}$ **d)** $\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}} 2\,dy\,dx = \boldsymbol{\pi}$

5. Niech $C(a,b)$ będzie zdefiniowane wzorem

$$\int\limits_{a}^{b} \frac{dx}{(x+2)\cdot(x+3)} = \ln C(a,b)\,.$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego:

a) $C(2,5) = \mathbf{35/32}$ **b)** $C(1,4) = \mathbf{8/7}$

c) $C(4,7) = \mathbf{21/20}$ **d)** $C(3,6) = \mathbf{16/15}$

6. Podać taką liczbę rzeczywistą a, że liczby zespolone z_1 oraz z_2 mają równe argumenty

a) $z_1 = 2+3i, \quad z_2 = a+7i, \qquad a = \mathbf{14/3}$

b) $z_1 = 2+ai, \quad z_2 = 5+7i, \qquad a = \mathbf{14/5}$

c) $z_1 = 2+3i, \quad z_2 = 5+ai, \qquad a = \mathbf{15/2}$

d) $z_1 = a+3i, \quad z_2 = 5+7i, \qquad a = \mathbf{15/7}$

7. Dla podanej macierzy wypisać w kolejności niemalejącej jej wartości własne (z uwzględnieniem krotności).

a) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ **2, 3, 5, 6**

b) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ **3, 4, 6, 7**

c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ **1, 2, 4, 5**

d) $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ **4, 5, 7, 8**

8. Podać w postaci ułamka nieskracalnego cosinus kąta między wektorami v_1 i v_2.

a) $v_1 = (1,2,2)$, $v_2 = (6,3,2)$, $\cos(v_1, v_2) = \mathbf{16/21}$

b) $v_1 = (1,2,2)$, $v_2 = (2,3,6)$, $\cos(v_1, v_2) = \mathbf{20/21}$

c) $v_1 = (1,2,2)$, $v_2 = (-2,2,1)$, $\cos(v_1, v_2) = \mathbf{4/9}$

d) $v_1 = (1,2,2)$, $v_2 = (2,2,1)$, $\cos(v_1, v_2) = \mathbf{8/9}$

9. Dla podanej liczby r podać największą taką liczbę naturalną n, że zbiór jednoelementowy $\{r\}$ z mnożeniem modulo n jest grupą.

a) $r = 5$, $n = \mathbf{20}$

b) $r = 7$, $n = \mathbf{42}$

c) $r = 4$, $n = \mathbf{12}$

d) $r = 6$, $n = \mathbf{30}$

10. Dla podanych rzędów elementów a i b grupy abelowej podać największy możliwy rząd elementu ab.

a) $r(a)=6,\ \ r(b)=10,\ \ \ \ r(ab)=\mathbf{30}$

b) $r(a)=14,\ \ r(b)=21,\ \ \ \ r(ab)=\mathbf{42}$

c) $r(a)=10,\ \ r(b)=14,\ \ \ \ r(ab)=\mathbf{70}$

d) $r(a)=6,\ \ r(b)=15,\ \ \ \ r(ab)=\mathbf{30}$

11. Zdarzenia losowe A, B i C są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A\cap B)$ i $P(A\cap C)$ podać w postaci ułamka nieskracalnego największą możliwą wartość, jaką może przyjmować $P(B\cap C)$.

a) $P(A\cap B)=1/4,\ \ P(A\cap C)=1/8,\ \ P(B\cap C)=\mathbf{1/2}$

b) $P(A\cap B)=1/2,\ \ P(A\cap C)=1/4,\ \ P(B\cap C)=\mathbf{1/2}$

c) $P(A\cap B)=1/2,\ \ P(A\cap C)=1/3,\ \ P(B\cap C)=\mathbf{2/3}$

d) $P(A\cap B)=1/3,\ \ P(A\cap C)=1/5,\ \ P(B\cap C)=\mathbf{3/5}$

12. W urnie znajduje się 10 kul z kolejnymi liczbami od 1 do 10. Losujemy z urny dwie kule (losowanie bez zwracania). Niech $P(n)$ będzie prawdopodobieństwem, że suma liczb napisanych na wylosowanych kulach jest równa n. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(17)=\mathbf{2/45}$

b) $P(14)=\mathbf{1/15}$

c) $P(19)=\mathbf{1/45}$

d) $P(18)=\mathbf{1/45}$

1. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna. Bardzo starannie pisać nawiasy określające przynależność końców do przedziału.

a) $\int\limits_0^\infty \frac{x^p}{x^4+x^2}\,dx$, $(\mathbf{1},\mathbf{3})$

b) $\int\limits_0^\infty \frac{x^p}{x^{25}+x^7}\,dx$, $(\mathbf{6},\mathbf{24})$

c) $\int\limits_0^\infty \frac{x^p}{x^9+x^3}\,dx$, $(\mathbf{2},\mathbf{8})$

d) $\int\limits_0^\infty \frac{x^p}{x^{16}+x^5}\,dx$, $(\mathbf{4},\mathbf{15})$

2. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą określoną wzorem

$$f(x)=\frac{e^x-x-1}{x^2}$$

dla $x\neq 0$. Podać wartość funkcji oraz wartości pochodnych podanych rzędów funkcji f w punkcie 0.

a) $f'''(0)=\mathbf{1/20}$

b) $f(0)=\mathbf{1/2}$

c) $f''(0)=\mathbf{1/12}$

d) $f'(0)=\mathbf{1/6}$

3. Podać promień zbieżności szeregu potęgowego.

a) $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{(4n)!\cdot x^n}{n^{4n}}$, $R=\mathbf{e^4/256}$

b) $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{(2n)!\cdot x^n}{n^{2n}}$, $R=\mathbf{e^2/4}$

c) $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{(3n)!\cdot x^n}{n^{3n}}$, $R=\mathbf{e^3/27}$

d) $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{n!\cdot x^n}{n^n}$, $R=\mathbf{e}$

4. Podać wartość całki iterowanej.

a) $\int\limits_{-4}^{4}\int\limits_{|x|}^{\sqrt{32-x^2}} 5\,dy\,dx = \mathbf{40\pi}$

b) $\int\limits_{-3}^{3}\int\limits_{|x|}^{\sqrt{18-x^2}} 4\,dy\,dx = \mathbf{18\pi}$

c) $\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}} 2\,dy\,dx = \boldsymbol{\pi}$

d) $\int\limits_{-2}^{2}\int\limits_{|x|}^{\sqrt{8-x^2}} 3\,dy\,dx = \mathbf{6\pi}$

5. Niech $C(a,b)$ będzie zdefiniowane wzorem

$$\int\limits_{a}^{b} \frac{dx}{(x+2)\cdot(x+3)} = \ln C(a,b)\,.$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego:

a) $C(2,5) = \mathbf{35/32}$

b) $C(1,4) = \mathbf{8/7}$

c) $C(3,6) = \mathbf{16/15}$

d) $C(4,7) = \mathbf{21/20}$

6. Podać taką liczbę rzeczywistą a, że liczby zespolone z_1 oraz z_2 mają równe argumenty

a) $z_1 = 2+3i,\ \ z_2 = a+7i, \quad a = \mathbf{14/3}$

b) $z_1 = 2+ai,\ \ z_2 = 5+7i, \quad a = \mathbf{14/5}$

c) $z_1 = 2+3i,\ \ z_2 = 5+ai, \quad a = \mathbf{15/2}$

d) $z_1 = a+3i,\ \ z_2 = 5+7i, \quad a = \mathbf{15/7}$

7. Dla podanej macierzy wypisać w kolejności niemalejącej jej wartości własne (z uwzględnieniem krotności).

a) $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ **4, 5, 7, 8**

b) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ **2, 3, 5, 6**

c) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ **3, 4, 6, 7**

d) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ **1, 2, 4, 5**

8. Podać w postaci ułamka nieskracalnego cosinus kąta między wektorami v_1 i v_2.

a) $v_1=(1,2,2)$, $v_2=(6,3,2)$, $\cos(v_1,v_2)=\mathbf{16/21}$

b) $v_1=(1,2,2)$, $v_2=(2,3,6)$, $\cos(v_1,v_2)=\mathbf{20/21}$

c) $v_1=(1,2,2)$, $v_2=(-2,2,1)$, $\cos(v_1,v_2)=\mathbf{4/9}$

d) $v_1=(1,2,2)$, $v_2=(2,2,1)$, $\cos(v_1,v_2)=\mathbf{8/9}$

9. Dla podanej liczby r podać największą taką liczbę naturalną n, że zbiór jednoelementowy $\{r\}$ z mnożeniem modulo n jest grupą.

a) $r=7$, $n=\mathbf{42}$

b) $r=4$, $n=\mathbf{12}$

c) $r=5$, $n=\mathbf{20}$

d) $r=6$, $n=\mathbf{30}$

10. Dla podanych rzędów elementów a i b grupy abelowej podać największy możliwy rząd elementu ab.

a) $r(a)=6$, $r(b)=15$, $r(ab)=\mathbf{30}$

b) $r(a)=6$, $r(b)=10$, $r(ab)=\mathbf{30}$

c) $r(a)=14$, $r(b)=21$, $r(ab)=\mathbf{42}$

d) $r(a)=10$, $r(b)=14$, $r(ab)=\mathbf{70}$

11. Zdarzenia losowe A, B i C są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A\cap B)$ i $P(A\cap C)$ podać w postaci ułamka nieskracalnego największą możliwą wartość, jaką może przyjmować $P(B\cap C)$.

a) $P(A\cap B)=1/4$, $P(A\cap C)=1/8$, $P(B\cap C)=\mathbf{1/2}$

b) $P(A\cap B)=1/3$, $P(A\cap C)=1/5$, $P(B\cap C)=\mathbf{3/5}$

c) $P(A\cap B)=1/2$, $P(A\cap C)=1/3$, $P(B\cap C)=\mathbf{2/3}$

d) $P(A\cap B)=1/2$, $P(A\cap C)=1/4$, $P(B\cap C)=\mathbf{1/2}$

12. W urnie znajduje się 10 kul z kolejnymi liczbami od 1 do 10. Losujemy z urny dwie kule (losowanie bez zwracania). Niech $P(n)$ będzie prawdopodobieństwem, że suma liczb napisanych na wylosowanych kulach jest równa n. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(14)=\mathbf{1/15}$

b) $P(17)=\mathbf{2/45}$

c) $P(18)=\mathbf{1/45}$

d) $P(19)=\mathbf{1/45}$