EGZAMIN MAGISTERSKI, 7.07.2022 r.
Matematyka w ekonomii

Zadanie **1. (8 punktów)**

Załóżmy, że logarytm zmiennej objaśnianej Y jest regresowany na logarytm zmiennej objaśniającej X,

$$\log \hat{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \log X.$$

Załóżmy, że $X^\star = \mu X$, gdzie μ jest stałą, i załóżmy, że $\log Y$ jest regresowany na $\log X^\star$.

(a) Określ, w jaki sposób estymatory wyznaczone metodą najmniejszych kwadratów dla parametrów tak określonego modelu regresji są powiązane z odpowiednimi estymatorami współczynników wyjściowego modelu regresji.

(b) Określ związek pomiędzy statystykami R^2 dla równań regresji obu modeli.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Sformułuj problem testowania dla jednej średniej w rozkładzie normalnym. Podaj postać statystyki testowej. Jaki jest jej rozkład przy hipotezie zerowej? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Załóżmy, że proces $\{Y_t\}$ jest opisany przez stacjonarny model AR(1) postaci:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + W_t,$$

gdzie $\{W_t\}$ to ciąg i.i.d zmiennych losowych o średniej zero i wariancji σ^2. Zakładamy, że $\beta_0 \neq 0$ oraz $0 < \beta_1 < 1$.

(a) Wyznacz wartość oczekiwaną Y_t.

(b) Wyznacz wariancję Y_t.

(c) Wyznacz autokowariancję rzędu dwa dla Y_t.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie geometrycznym. Jest to rozkład z funkcją prawdopodobieństwa qp^n, $n = 0, 1, \ldots$ ($q = 1 - p$ i $0 < p < 1$), ze średnią p/q i wariancją p/q^2. Niech $Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y)$.

a) Obliczyć $\mathbb{E}Z$ i $\mathbb{V}arZ$.

b) $\mathbb{P}(Z \neq 0)$ oraz $\mathbb{P}(Z = 1)$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 7.07.2022 r.
Nauczycielska

Zadanie **1. (8 punktów)**
Niech $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie dane wzorem
$$p(x, y) = x.$$

- Udowodnij, że p jest funkcją ciągłą.
- Czy obraz $p[U]$, gdy U jest zbiorem otwartym, musi być otwarty? Odpowiedź uzasadnij.
- Podaj przykład domkniętego zbioru $D \subseteq \mathbb{R}^2$ takiego, że jego obraz $p[D]$ nie jest domknięty.
- Pokaż, że jeżeli $D \subseteq \mathbb{R}^2$ jest domknięty i ograniczony, to jego obraz $p[D]$ jest domknięty.

Zadanie **2. (8 punktów)**
Jaka jest reszta z dzielenia 5^{30} przez 31? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie **3. (8 punktów)**
Dwa przystające i niezachodzące na siebie trójkąty równoramienne ABC oraz BCD mają wspólny bok BC, zaś ich podstawami są boki AC i BD (zachodzą więc równości $AB = BC = CD$, zaś czworokąt $ABDC$ będący sumą tych dwóch trójkątów jest równoległobokiem).

1. Znajdź i opisz, wraz z uzasadnieniami, dwie różne izometrie płaszczyzny przekształcające trójkąt ABC na trójkąt BCD.
2. Uzasadnij, że nie ma więcej niż dwie takich izometrii.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Podaj przykład zbioru X i relacji R na X, która spełnia następujące warunki:

$$\forall x \in X \, \exists y \in X \, (xRy), \qquad \neg\big(\forall y \in X \, \exists x \in X \, (xRy)\big).$$

Uzasadnij, że oba warunki są spełnione.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 7.07.2022 r.
Matematyka stosowana

Zadanie **1. (8 punktów)**

Rozważamy równanie dyfuzji $u_t = u_{xx}$ w odcinku $(0,1)$ z warunkami brzegowymi $u(0,t) = u(1,t) = 0$ i warunkiem początkowym $u(x,0) = 4x(1-x)$.

Skonstruuj rozwiązanie $u(x,t)$ tego zagadnienia.

Udowodnij, że $0 \leq u(x,t) \leq 1$ dla wszystkich $t > 0$ i $0 < x < 1$.

Udowodnij, że $u(x,t) \to 0$, gdy $t \to \infty$.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Rozpatrzmy kryształ w kształcie sześcianu o długości boku x i objętości V, który rośnie. Szybkość zmiany w czasie objętości kryształu jest opisana przez równanie następującej postaci:

$$\frac{dV}{dt} = kx^2(V_0 - V),$$

gdzie k i V_0 są dodatnimi stałymi.

(a) Wyznacz równanie opisujące szybkość zmiany x, czyli długości boku tego kryształu.

(b) Załóżmy, że kryształ wyrasta z bardzo małego "ziarna". Wykaż, że jego tempo wzrostu stale spada.

(c) Co się dzieje z wielkością kryształu po bardzo długim czasie?

(d) Jaki jest jego rozmiar (to znaczy, jakie jest x albo V), gdy rośnie w tempie, które jest równe połowie jego początkowego tempa wzrostu?

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech $\{B(t),\, t \geq 0\}$ będzie ruchem Browna. Dla $0 < s < t$, wyznacz rozkład zmiennej losowej $B(s) + B(t)$.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie geometrycznym. Jest to rozkład z funkcją prawdopodobieństwa qp^n, $n = 0, 1, \ldots$ ($q = 1 - p$ i $0 < p < 1$), ze średnią p/q i wariancją p/q^2. Niech $Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y)$.

a) Obliczyć $\mathbb{E}Z$ i $\mathbb{V}arZ$.

b) $\mathbb{P}(Z \neq 0)$ oraz $\mathbb{P}(Z = 1)$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 7.07.2022 r.
Matematyka teoretyczna

Zadanie **1. (8 punktów)**
Niech $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie dane wzorem

$$p(x, y) = x.$$

- Udowodnij, że p jest funkcją ciągłą.
- Czy obraz $p[U]$, gdy U jest zbiorem otwartym, musi być otwarty? Odpowiedź uzasadnij.
- Podaj przykład domkniętego zbioru $D \subseteq \mathbb{R}^2$ takiego, że jego obraz $p[D]$ nie jest domknięty.
- Pokaż, że jeżeli $D \subseteq \mathbb{R}^2$ jest domknięty i ograniczony, to jego obraz $p[D]$ jest domknięty.

Zadanie **2. (8 punktów)**
(a)(1pkt) Podaj definicję komutanta grupy G, oznaczanego przez G'.
(b)(3pkt) Udowodnij, że $\mathrm{GL}_n(K)' \subseteq \mathrm{SL}_n(K)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_{>0}$ i dowolnego ciaĹ,a K.
(c)(4pkt) Niech $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Wyznacz S_n', podając pełne uzasadnienie.

Zadanie **3. (8 punktów)**
Rozważmy przestrzenie $X = L^2(-1,1)$, $Y = L^1(-1,1)$, $Y_e = \{f \in Y \ : f(x) = f(-x)\ p.w.\}$ oraz funkcjonał:

$$L(f) = \int_{-1}^{1} f(x)e^x\, dx.$$

1. Uzasadnij, że $L_a : X \to \mathbb{C}$ zadane przez $L_a(f) = L(f)$ jest ciągłym funkcjonałem liniowym i znajdź jego normę.
2. Uzasadnij, że $L_b : Y \to \mathbb{C}$ zadane przez $L_b(f) = L(f)$ jest ciągłym funkcjonałem liniowym i znajdź jego normę.

3. Uzasadnij, że $L_c : Y_e \to \mathbb{C}$ zadane przez $L_c(f) = L(f)$ jest ciągłym funkcjonałem liniowym i znajdź jego normę.

4. Czy L_b jest rozszerzeniem L_c zachowującym normę? Jeśli nie, to znajdź rozszerzenie $L_d : Y \to \mathbb{C}$ operatora L_c, takie że $\|L_d\|_{Y*} = \|L_c\|_{(Y_e)^*}$.

Zadanie **4. (8 punktów)**

EGZAMIN MAGISTERSKI, 7.07.2022 r.
Analiza danych

Zadanie 1. (8 punktów)

1. Rozważmy nastepujący ukryty model Markowa:

   (Ukryte) stany: $\mathcal{S} = \{0, 1\}$. Macierz prawdopodobieństw przejść między stanami jest następująca:
   $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}.$$
   Zbiór obserwacji: $\mathcal{V} = \{a, b\}$. Prawdopodobieństwa obserwacji będąc w każdym ze stanów $s \in \mathcal{S}$:
   $$P(o_t = a|X_t = 0) = 0.6 \qquad P(o_t = b|X_t = 0) = 0.4$$
   $$P(o_t = a|X_t = 1) = 0.5 \qquad P(o_t = b|X_t = 1) = 0.5$$
   Znamy również rozkład początkowy łańcucha:

   $P(X_1 = 0) = 0.5$, $P(X_1 = 1) = 0.5$. Używając procedury *forward* policz prawdopodobieństwo zaobserwowania b w chwili 1 oraz b w chwili 2 (tj. $o_1 = b, o_2 = b$).

Zadanie 2. (8 punktów)

Sformułuj problem testowania dla dwóch (wektorów) średnich. Podaj postać statystyki testowej. Jaki jest jej rozkład przy hipotezie zerowej? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 3. (8 punktów)

Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości f. Na podstawie jednej obserwacji weryfikujemy

$H_0 : f(x) = \mathbb{1}(0 \leq x \leq 1)$ przeciwko $H_1 : f(x) = 6x^5\, \mathbb{1}(0 \leq x \leq 1)$.

Wyznacz moc testu jednostajnie najmocniejszego na poziomie istotności $\alpha = 0.1$.

Zadanie 4. (8 punktów)

Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie geometrycznym. Jest to rozkład z funkcją prawdopodobieństwa qp^n, $n = 0, 1, \ldots$ ($q = 1 - p$ i $0 < p < 1$), ze średnią p/q i wariancją p/q^2. Niech $Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y)$.

a) Obliczyć $\mathbb{E}Z$ i $\mathbb{V}arZ$.

b) $\mathbb{P}(Z \neq 0)$ oraz $\mathbb{P}(Z = 1)$.