

EGZAMIN LICENCJACKI (zadania otwarte)
17 września 2021 r.

Zadanie **1.** Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_1^8 \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x}}.$$

Zadanie **2.** Wyznaczyć największą wartość funkcji

$$f(x, y) = x$$

na zbiorze

$$\{(x, y) : x^4 + y^4 = xy\}.$$

Wyznaczyć wszystkie punkty, w których wartość największa jest osiągnięta.

Zadanie **3.** Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$x' = x^3, \quad x(0) = 1.$$

Zadanie **4.** Dana jest taka macierz A rozmiaru 4×4 o wyrazach rzeczywistych, że wektory

$$(1, 1, 1, 1), \quad (2, 3, 5, 7) \quad \text{oraz} \quad (5, 7, 11, 15)$$

są wektorami własnymi macierzy A .

Dowieść, że wektor $(1, 4, 10, 16)$ również jest wektorem własnym macierzy A .

Zadanie **5.** Podać przykład skończonej grupy abelowej G oraz takich jej elementów a i b rzędu 30, że rząd elementu ab jest równy 10.

Oczywista oczywistość: Udowodnić poprawność podanego przykładu.

Zadanie **6.** Komisja głosuje nad podjęciem uchwały. Każdy z członków komisji głosuje za przyjęciem uchwały z prawdopodobieństwem $3/4$, a przeciwko z prawdopodobieństwem $1/4$, przy czym decyzje poszczególnych członków komisji o ewentualnym poparciu uchwały w głosowaniu są niezależne. Zgodnie z regulaminem komisji uchwała jest podjęta, gdy zagłosuje na nią więcej niż połowa członków komisji, a odrzucona, gdy większość zagłosuje przeciw. W razie remisu w głosowaniu, o przyjęciu lub odrzuceniu uchwały decyduje rzut monetą.

Która komisja przyjmie uchwałę z większym prawdopodobieństwem: 99-osobowa czy 100-osobowa?