EGZAMIN MAGISTERSKI, 13.09.2021 r.
Matematyka w ekonomii

Zadanie **1. (8 punktów)**

Dla dwóch modeli regresji:

(a) $\log_e Y = \alpha + \beta \log_e X + \epsilon$,

(b) $\log_{10} Y = \alpha + \beta \log_{10} X + \epsilon$,

dokonano estymacji parametrów β i α metodą najmniejszych kwadratów.

(i) Czy otrzymane w ten sposób estymatory parametrów β są dla obu modeli takie same?

(ii) Czy otrzymane w ten sposób estymatory parametrów α są dla obu modeli takie same?

Zadanie **2. (8 punktów)**

1. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbą losową z rozkładu normalnego $N(\theta, \sigma^2)$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, o gęstości
$$f_{\theta,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\theta)^2}{2\sigma^2}}, \quad \text{gdzie } \theta \text{ jest znane}$$
oraz niech $\bar{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ i $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.

   Zadania

   (a) pokaż, że rozkład S^2 nie zależy od parametru θ;
   (b) pokaż, że S^2 jest estymatorem nieobciążonym parametru σ^2;
   (c) znajdź estymator największej wiarygodności parametru σ^2.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Rozpatrzmy szereg czasowy postaci
$$X_t = \phi X_{t-1} + W_t, \ t \in \mathbb{Z},$$
gdzie $\phi \neq 1$ oraz $\{W_t, \, t \in \mathbb{Z}\}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $N(0, \sigma^2)$.

(i) Wyznacz funkcję autokorelacji procesu $\{X_t\}$.

(ii) Zakładając, że obserwujemy X_1 oraz X_3, wyznacz na podstawie tych obserwacji najlepszą, w sensie średniokwadratowym, **liniową** prognozę X_2.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Niech $U_1, \ldots, U_n$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie jednostajnym $\mathcal{U}(0,1)$ na $(0,1)$. Policzyć

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\sum_{j=1}^{n} U_j > \frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n}{12}}).$$

EGZAMIN MAGISTERSKI, 13.09.2021 r.
Matematyka teoretyczna

Zadanie **1. (8 punktów)**

Funkcję borelowską $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy funkcją prostą, jeżeli ma skończenie wiele wartości.

- Podaj przykład funkcji prostej f takiej, że
$$\int f \, d\lambda = 2\sqrt{\pi}.$$
- Pokaż, że każda funkcja prosta jest ograniczona.
- Pokaż, że każda funkcja prosta jest postaci
$$f(x) = \sum_{i \leq n} a_i \chi_{A_i}(x)$$
dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, ciągu $(a_i)_{i \leq n}$ liczb rzeczywistych i ciągu $(A_i)_{i \leq n}$ zbiorów borelowskich.
- Pokaż, że w poprzednim podpunkcie można założyć, że ciąg (A_i) jest wstępujący.

Powyżej λ oznacza miarę Lebesgue'a, a $\chi_B\colon \mathbb{R} \to \{0,1\}$ jest funkcją charakterystyczną zbioru B, tzn. $\chi_B(x) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in B$.

Zadanie **2. (8 punktów)**

(a) (1pkt) Podać definicję działania grupy na zbiorze.

(b) (4pkt) Uzasadnić, że wzór $(a,b)*(x,y) := (ax, by)$ zadaje działanie grupy $\{-1,1\} \times \{-1,1\}$ na zbiorze $\mathbb{R}^2$, gdzie operacja grupowa w $\{-1,1\}$ to zwykłe mnożenie. Wyznaczyć orbitę elementu $(3,2)$ oraz jego stabilizator.

(c) (3pkt) Niech G będzie podgrupą grupy S_9 generowaną przez permutację
$$\tau := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 4 & 3 & 5 & 7 & 6 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Grupa G działa naturalnie na zbiorze $\{1, \ldots, 9\}$ przez $\sigma * n := \sigma(n)$. Wyznaczyć orbitę elementu 1 oraz jego stabilizator.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Zakładamy, że $u_0 \in C\big([a,b]\big)$ oraz $K \in C\big([a,b] \times [a,b]\big)$. Przy jakich założeniach na $\lambda \in \mathbb{R}$ równanie całkowe

$$u(x) = u_0(x) + \lambda \int_a^b K(x,y) \sin(u(y))\, dy$$

ma jednoznaczne rozwiązanie $u \in C\big([a,b]\big)$.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Niech X będzie zamkniętą, orientowalną powierzchnią rodzaju (genusu) 3 z usuniętym (małym, włożonym) dyskiem. Oblicz homologie $H_n(X)$ przestrzeni X (o współczynnikach całkowitych).

EGZAMIN MAGISTERSKI, 13.09.2021 r.
Analiza danych

Zadanie **1. (8 punktów)**

1. Dana jest macierz

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dokonaj rozkładu SVD (Singular Value Decomposition) tej macierzy, tj. wskaż/wylicz macierze $\mathbf{U}$ (rozmiaru 4×3), macierz $\mathbf{\Lambda}$ (rozmiaru 3×3) oraz macierz $\mathbf{V}$ (rozmiaru 3×3) takie, że

$$\mathbf{Z} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\mathbf{V}^T,$$

oraz

- $\mathbf{U}$ ma ortogonalne kolumny,
- $\mathbf{V}$ ma ortonormalne kolumny,
- $\mathbf{\Lambda}$ jest macierzą diagonalną z nieujemnymi wartościami na przekątnej.

(Uwaga: dla macierzy diagonalnej $\mathbf{\Lambda}$ z nieujemnymi wartościami na przekątnej $a_i \geq 0$ przez $\mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}}$ rozumiemy macierz diagonalną z elementami $\sqrt{a_i}$ na przekątnej).

Zadanie **2. (8 punktów)**

Niech $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_N$ będzie próbą z rozkładu $N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, gdzie $|\Sigma| > 0$, $N > n$, a macierz kowariancji nie jest znana. Rozważamy problem testowania $H_0 : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ przeciwko $H_1 : \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}_0$ na poziomie istotności α. Podaj postać statystyki testowej w powyższym zagadnieniu. Jaki jest jej rozkład przy H_0? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech $X_1, ..., X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $N(\mu, 1)$. Wyznacz test jednostajnie najmocniejszy w problemie testowania

$H_0 : \mu = 0$;

$H_1 : \mu < 0$,

na poziomie istotności $\alpha = 0.05$.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Niech $U_1, \ldots, U_n$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie jednostajnym $\mathcal{U}(0,1)$ na $(0,1)$. Policzyć

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\sum_{j=1}^{n} U_j > \frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n}{12}}).$$