1. Niech $f(x)=x^2\cdot\sqrt[3]{x}$. Podać wartości pochodnych podanych rzędów funkcji f w punkcie 1.

a) $f'(1)=$ .... **b)** $f''(1)=$ ....

c) $f'''(1)=$ .... **d)** $f^{(4)}(1)=$ ....

2. Podać w postaci uproszczonej (np. liczby wymierne w postaci ułamka nieskracalnego) kres górny zbioru, gdzie $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$.

a) $\sup\left\{\frac{m}{n}:\ m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 2^m\leqslant 3^n\right\}=$ ....

b) $\sup\left\{\frac{m}{n}:\ m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ m^2\leqslant 2n^2\right\}=$ ....

c) $\sup\left\{\frac{m}{n}:\ m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 8^m\leqslant 32^n\right\}=$ ....

d) $\sup\left\{\frac{m}{n}:\ m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 4m^2\leqslant 9n^2\right\}=$ ....

3. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny. Bardzo starannie pisać nawiasy określające przynależność końców do przedziału.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3p}+n^{5p-1}}$, ... **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}+n^{5p-1}}$, ...

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5p}+n^{9p-1}}$, ... **d)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4p}+n^{9p-1}}$, ...

4. Podać wartość całki oznaczonej.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^5\,dx}{x^{12}+1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ **b)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{x^6+1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{x^8+1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ **d)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4\,dx}{x^{10}+1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

5. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ 1/2 & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$$

Podać wartości pochodnych podanych rzędów funkcji f w zerze.

a) $f'''(0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ **b)** $f^{(8)}(0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

c) $f^{(4)}(0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ **d)** $f^{(9)}(0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

6. Dla podanej liczby n podać najmniejszą taką liczbę całkowitą dodatnią k, że

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^k .$$

a) $n = 29$, $k = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ **b)** $n = 19$, $k = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

c) $n = 13$, $k = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ **d)** $n = 17$, $k = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

7. Dla podanej macierzy wypisać w kolejności niemalejącej jej rzeczywiste wartości własne (z uwzględnieniem krotności).

a) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ .... **b)** $\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ ....

c) $\begin{pmatrix} 35 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ .... **d)** $\begin{pmatrix} 16 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ ....

8. Dla podanej liczby a wskazać liczby rzeczywiste b, c o następującej własności: Dla każdego układu równań liniowych z trzema niewiadomymi, którego rozwiązaniami są $(1,2,3)$ oraz $(2,5,7)$, rozwiązaniem tego układu jest także (a,b,c).

a) $a=5$, $b=$ ...., $c=$ ....

b) $a=4$, $b=$ ...., $c=$ ....

c) $a=3$, $b=$ ...., $c=$ ....

d) $a=0$, $b=$ ...., $c=$ ....

9. Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{1,2,3,\ldots,57,58\}$, natomiast działaniem jest mnożenie modulo 59. Dla podanego elementu g tej grupy podać element do niego odwrotny.

a) $g=5$, ... **b)** $g=3$, ...

c) $g=2$, ... **d)** $g=4$, ...

10. Niech $E(n)$ będzie liczbą elementów rzędu n w grupie niezerowych liczb zespolonych z mnożeniem. Wówczas.

a) $E(55) =$ .... **b)** $E(21) =$ ....

c) $E(14) =$ .... **d)** $E(16) =$ ....

11. W urnie znajduje się n kul z kolejnymi liczbami od 1 do n. Trzykrotnie losujemy z urny kulę (losowanie ze zwracaniem). Niech $P(n)$ będzie prawdopodobieństwem, że na wylosowanych kulach pojawiły się trzy różne liczby (czyli za każdym razem wylosowano inną kulę). Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(8) =$ .... **b)** $P(4) =$ ....

c) $P(5) =$ .... **d)** $P(6) =$ ....

12. Zdarzenia losowe A, B i C są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$ i $P(B \cap C)$ podać w postaci ułamka nieskracalnego $P(A \cap B \cap C)$, o ile istnieją niezależne zdarzenia A, B i C spełniające podane warunki. Wpisać **NIE**, jeśli takie zdarzenia nie istnieją.

a) $P(A \cap B) = 1/4$, $P(A \cap C) = 1/9$, $P(B \cap C) = 1/100$,
$P(A \cap B \cap C) =$ ....

b) $P(A \cap B) = 1/9$, $P(A \cap C) = 1/16$, $P(B \cap C) = 1/25$,
$P(A \cap B \cap C) =$ ....

c) $P(A \cap B) = 1/8$, $P(A \cap C) = 1/16$, $P(B \cap C) = 1/32$,
$P(A \cap B \cap C) =$ ....

d) $P(A \cap B) = 1/3$, $P(A \cap C) = 1/9$, $P(B \cap C) = 1/27$,
$P(A \cap B \cap C) =$ ....