1. Niech $f(x)=x^2\cdot\sqrt[3]{x}$. Podać wartości pochodnych podanych rzędów funkcji f w punkcie 1.

a) $f'(1)=\mathbf{7/3}$ **b)** $f''(1)=\mathbf{28/9}$

c) $f'''(1)=\mathbf{28/27}$ **d)** $f^{(4)}(1)=\mathbf{-56/81}$

2. Podać w postaci uproszczonej (np. liczby wymierne w postaci ułamka nieskracalnego) kres górny zbioru, gdzie $\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$.

a) $\sup\left\{\frac{m}{n}:\ m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 2^m\leqslant 3^n\right\}=\mathbf{log_2 3}$

b) $\sup\left\{\frac{m}{n}:\ m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ m^2\leqslant 2n^2\right\}=\boldsymbol{\sqrt{2}}$

c) $\sup\left\{\frac{m}{n}:\ m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 8^m\leqslant 32^n\right\}=\mathbf{5/3}$

d) $\sup\left\{\frac{m}{n}:\ m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 4m^2\leqslant 9n^2\right\}=\mathbf{3/2}$

3. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny. Bardzo starannie pisać nawiasy określające przynależność końców do przedziału.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3p}+n^{5p-1}}$, $\boldsymbol{(1/3,\infty)}$ **b)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}+n^{5p-1}}$, $\boldsymbol{(2/5,\infty)}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5p}+n^{9p-1}}$, $\boldsymbol{(1/5,\infty)}$ **d)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4p}+n^{9p-1}}$, $\boldsymbol{(2/9,\infty)}$

4. Podać wartość całki oznaczonej.

a) $\int_0^1 \frac{x^5\,dx}{x^{12}+1} = \boldsymbol{\frac{\pi}{24}}$

b) $\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{x^6+1} = \boldsymbol{\frac{\pi}{12}}$

c) $\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{x^8+1} = \boldsymbol{\frac{\pi}{16}}$

d) $\int_0^1 \frac{x^4\,dx}{x^{10}+1} = \boldsymbol{\frac{\pi}{20}}$

5. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x-1-x}{x^2} & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ 1/2 & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$$

Podać wartości pochodnych podanych rzędów funkcji f w zerze.

a) $f'''(0) = \mathbf{1/20}$

b) $f^{(8)}(0) = \mathbf{1/90}$

c) $f^{(4)}(0) = \mathbf{1/30}$

d) $f^{(9)}(0) = \mathbf{1/110}$

6. Dla podanej liczby n podać najmniejszą taką liczbę całkowitą dodatnią k, że

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^k .$$

a) $n = 29$, $k = \mathbf{7}$

b) $n = 19$, $k = \mathbf{5}$

c) $n = 13$, $k = \mathbf{11}$

d) $n = 17$, $k = \mathbf{7}$

7. Dla podanej macierzy wypisać w kolejności niemalejącej jej rzeczywiste wartości własne (z uwzględnieniem krotności).

a) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ **−4, 9**

b) $\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ **−3, 12**

c) $\begin{pmatrix} 35 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ **−1, 36**

d) $\begin{pmatrix} 16 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ **−2, 18**

8. Dla podanej liczby a wskazać liczby rzeczywiste b, c o następującej własności: Dla każdego układu równań liniowych z trzema niewiadomymi, którego rozwiązaniami są $(1, 2, 3)$ oraz $(2, 5, 7)$, rozwiązaniem tego układu jest także (a, b, c).

a) $a=5$, $b=\mathbf{14}$, $c=\mathbf{19}$

b) $a=4$, $b=\mathbf{11}$, $c=\mathbf{15}$

c) $a=3$, $b=\mathbf{8}$, $c=\mathbf{11}$

d) $a=0$, $b=\mathbf{-1}$, $c=\mathbf{-1}$

9. Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{1, 2, 3, \ldots, 57, 58\}$, natomiast działaniem jest mnożenie modulo 59. Dla podanego elementu g tej grupy podać element do niego odwrotny.

a) $g=5$, **12**

b) $g=3$, **20**

c) $g=2$, **30**

d) $g=4$, **15**

10. Niech $E(n)$ będzie liczbą elementów rzędu n w grupie niezerowych liczb zespolonych z mnożeniem. Wówczas.

a) $E(55)=\mathbf{40}$ **b)** $E(21)=\mathbf{12}$

c) $E(14)=\mathbf{6}$ **d)** $E(16)=\mathbf{8}$

11. W urnie znajduje się n kul z kolejnymi liczbami od 1 do n. Trzykrotnie losujemy z urny kulę (losowanie ze zwracaniem). Niech $P(n)$ będzie prawdopodobieństwem, że na wylosowanych kulach pojawiły się trzy różne liczby (czyli za każdym razem wylosowano inną kulę). Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(8)=\mathbf{21/32}$ **b)** $P(4)=\mathbf{3/8}$

c) $P(5)=\mathbf{12/25}$ **d)** $P(6)=\mathbf{5/9}$

12. Zdarzenia losowe A, B i C są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A\cap B)$, $P(A\cap C)$ i $P(B\cap C)$ podać w postaci ułamka nieskracalnego $P(A\cap B\cap C)$, o ile istnieją niezależne zdarzenia A, B i C spełniające podane warunki. Wpisać **NIE**, jeśli takie zdarzenia nie istnieją.

a) $P(A\cap B)=1/4$, $P(A\cap C)=1/9$, $P(B\cap C)=1/100$,
$P(A\cap B\cap C)=$ **NIE**

b) $P(A\cap B)=1/9$, $P(A\cap C)=1/16$, $P(B\cap C)=1/25$,
$P(A\cap B\cap C)=\mathbf{1/60}$

c) $P(A\cap B)=1/8$, $P(A\cap C)=1/16$, $P(B\cap C)=1/32$,
$P(A\cap B\cap C)=\mathbf{1/64}$

d) $P(A\cap B)=1/3$, $P(A\cap C)=1/9$, $P(B\cap C)=1/27$,
$P(A\cap B\cap C)=\mathbf{1/27}$

1. Niech $f(x)=x^2\cdot\sqrt[3]{x}$. Podać wartości pochodnych podanych rzędów funkcji f w punkcie 1.

a) $f'''(1)=\mathbf{28/27}$

b) $f''(1)=\mathbf{28/9}$

c) $f'(1)=\mathbf{7/3}$

d) $f^{(4)}(1)=\mathbf{-56/81}$

2. Podać w postaci uproszczonej (np. liczby wymierne w postaci ułamka nieskracalnego) kres górny zbioru, gdzie $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$.

a) $\sup\left\{\frac{m}{n}:\ m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 4m^2\leqslant 9n^2\right\}=\mathbf{3/2}$

b) $\sup\left\{\frac{m}{n}:\ m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 8^m\leqslant 32^n\right\}=\mathbf{5/3}$

c) $\sup\left\{\frac{m}{n}:\ m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 2^m\leqslant 3^n\right\}=\mathbf{\log_2 3}$

d) $\sup\left\{\frac{m}{n}:\ m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ m^2\leqslant 2n^2\right\}=\boldsymbol{\sqrt{2}}$

3. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny. Bardzo starannie pisać nawiasy określające przynależność końców do przedziału.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5p}+n^{9p-1}}$, $(\mathbf{1/5},\boldsymbol{\infty})$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3p}+n^{5p-1}}$, $(\mathbf{1/3},\boldsymbol{\infty})$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}+n^{5p-1}}$, $(\mathbf{2/5},\boldsymbol{\infty})$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4p}+n^{9p-1}}$, $(\mathbf{2/9},\boldsymbol{\infty})$

4. Podać wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_0^1 \frac{x^5\,dx}{x^{12}+1} = \boldsymbol{\frac{\pi}{24}}$ **b)** $\int\limits_0^1 \frac{x^4\,dx}{x^{10}+1} = \boldsymbol{\frac{\pi}{20}}$

c) $\int\limits_0^1 \frac{x^3\,dx}{x^8+1} = \boldsymbol{\frac{\pi}{16}}$ **d)** $\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{x^6+1} = \boldsymbol{\frac{\pi}{12}}$

5. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ 1/2 & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$$

Podać wartości pochodnych podanych rzędów funkcji f w zerze.

a) $f^{(9)}(0) = \mathbf{1/110}$ **b)** $f^{(8)}(0) = \mathbf{1/90}$

c) $f^{(4)}(0) = \mathbf{1/30}$ **d)** $f'''(0) = \mathbf{1/20}$

6. Dla podanej liczby n podać najmniejszą taką liczbę całkowitą dodatnią k, że

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^k .$$

a) $n = 19, \quad k = \mathbf{5}$ **b)** $n = 17, \quad k = \mathbf{7}$

c) $n = 29, \quad k = \mathbf{7}$ **d)** $n = 13, \quad k = \mathbf{11}$

7. Dla podanej macierzy wypisać w kolejności niemalejącej jej rzeczywiste wartości własne (z uwzględnieniem krotności).

a) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ **−4, 9**

b) $\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ **−3, 12**

c) $\begin{pmatrix} 16 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ **−2, 18**

d) $\begin{pmatrix} 35 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ **−1, 36**

8. Dla podanej liczby a wskazać liczby rzeczywiste b, c o następującej własności: Dla każdego układu równań liniowych z trzema niewiadomymi, którego rozwiązaniami są $(1,2,3)$ oraz $(2,5,7)$, rozwiązaniem tego układu jest także (a,b,c).

a) $a=0$, $b=\mathbf{-1}$, $c=\mathbf{-1}$

b) $a=4$, $b=\mathbf{11}$, $c=\mathbf{15}$

c) $a=3$, $b=\mathbf{8}$, $c=\mathbf{11}$

d) $a=5$, $b=\mathbf{14}$, $c=\mathbf{19}$

9. Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{1,2,3,\ldots,57,58\}$, natomiast działaniem jest mnożenie modulo 59. Dla podanego elementu g tej grupy podać element do niego odwrotny.

a) $g=3$, **20**

b) $g=4$, **15**

c) $g=2$, **30**

d) $g=5$, **12**

10. Niech $E(n)$ będzie liczbą elementów rzędu n w grupie niezerowych liczb zespolonych z mnożeniem. Wówczas.

a) $E(16) = \mathbf{8}$ **b)** $E(55) = \mathbf{40}$

c) $E(21) = \mathbf{12}$ **d)** $E(14) = \mathbf{6}$

11. W urnie znajduje się n kul z kolejnymi liczbami od 1 do n. Trzykrotnie losujemy z urny kulę (losowanie ze zwracaniem). Niech $P(n)$ będzie prawdopodobieństwem, że na wylosowanych kulach pojawiły się trzy różne liczby (czyli za każdym razem wylosowano inną kulę). Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(6) = \mathbf{5/9}$ **b)** $P(8) = \mathbf{21/32}$

c) $P(5) = \mathbf{12/25}$ **d)** $P(4) = \mathbf{3/8}$

12. Zdarzenia losowe A, B i C są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$ i $P(B \cap C)$ podać w postaci ułamka nieskracalnego $P(A \cap B \cap C)$, o ile istnieją niezależne zdarzenia A, B i C spełniające podane warunki. Wpisać **NIE**, jeśli takie zdarzenia nie istnieją.

a) $P(A \cap B) = 1/4$, $P(A \cap C) = 1/9$, $P(B \cap C) = 1/100$,
$P(A \cap B \cap C) =$ **NIE**

b) $P(A \cap B) = 1/9$, $P(A \cap C) = 1/16$, $P(B \cap C) = 1/25$,
$P(A \cap B \cap C) = \mathbf{1/60}$

c) $P(A \cap B) = 1/3$, $P(A \cap C) = 1/9$, $P(B \cap C) = 1/27$,
$P(A \cap B \cap C) = \mathbf{1/27}$

d) $P(A \cap B) = 1/8$, $P(A \cap C) = 1/16$, $P(B \cap C) = 1/32$,
$P(A \cap B \cap C) = \mathbf{1/64}$

1. Niech $f(x)=x^2\cdot\sqrt[3]{x}$. Podać wartości pochodnych podanych rzędów funkcji f w punkcie 1.

a) $f'''(1)=\mathbf{28/27}$

b) $f'(1)=\mathbf{7/3}$

c) $f^{(4)}(1)=\mathbf{-56/81}$

d) $f''(1)=\mathbf{28/9}$

2. Podać w postaci uproszczonej (np. liczby wymierne w postaci ułamka nieskracalnego) kres górny zbioru, gdzie $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$.

a) $\sup\left\{\frac{m}{n}:\ m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 2^m\leqslant 3^n\right\}=\mathbf{log_2 3}$

b) $\sup\left\{\frac{m}{n}:\ m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 8^m\leqslant 32^n\right\}=\mathbf{5/3}$

c) $\sup\left\{\frac{m}{n}:\ m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 4m^2\leqslant 9n^2\right\}=\mathbf{3/2}$

d) $\sup\left\{\frac{m}{n}:\ m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ m^2\leqslant 2n^2\right\}=\boldsymbol{\sqrt{2}}$

3. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny. Bardzo starannie pisać nawiasy określające przynależność końców do przedziału.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}+n^{5p-1}}$, $(\mathbf{2/5},\ \boldsymbol{\infty})$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3p}+n^{5p-1}}$, $(\mathbf{1/3},\ \boldsymbol{\infty})$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5p}+n^{9p-1}}$, $(\mathbf{1/5},\ \boldsymbol{\infty})$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4p}+n^{9p-1}}$, $(\mathbf{2/9},\ \boldsymbol{\infty})$

4. Podać wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_0^1 \frac{x^5\,dx}{x^{12}+1} = \boldsymbol{\frac{\pi}{24}}$

b) $\int\limits_0^1 \frac{x^3\,dx}{x^8+1} = \boldsymbol{\frac{\pi}{16}}$

c) $\int\limits_0^1 \frac{x^4\,dx}{x^{10}+1} = \boldsymbol{\frac{\pi}{20}}$

d) $\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{x^6+1} = \boldsymbol{\frac{\pi}{12}}$

5. Niech

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-1-x}{x^2} & \text{dla} \quad x\neq 0 \\ 1/2 & \text{dla} \quad x=0 \end{cases}$$

Podać wartości pochodnych podanych rzędów funkcji f w zerze.

a) $f^{(4)}(0)=\mathbf{1/30}$

b) $f'''(0)=\mathbf{1/20}$

c) $f^{(9)}(0)=\mathbf{1/110}$

d) $f^{(8)}(0)=\mathbf{1/90}$

6. Dla podanej liczby n podać najmniejszą taką liczbę całkowitą dodatnią k, że

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^n=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^k.$$

a) $n=19, \quad k=\mathbf{5}$

b) $n=17, \quad k=\mathbf{7}$

c) $n=29, \quad k=\mathbf{7}$

d) $n=13, \quad k=\mathbf{11}$

7. Dla podanej macierzy wypisać w kolejności niemalejącej jej rzeczywiste wartości własne (z uwzględnieniem krotności).

a) $\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{-3,\ 12}$

b) $\begin{pmatrix} 16 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{-2,\ 18}$

c) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{-4,\ 9}$

d) $\begin{pmatrix} 35 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{-1,\ 36}$

8. Dla podanej liczby a wskazać liczby rzeczywiste b, c o następującej własności: Dla każdego układu równań liniowych z trzema niewiadomymi, którego rozwiązaniami są $(1, 2, 3)$ oraz $(2, 5, 7)$, rozwiązaniem tego układu jest także (a, b, c).

a) $a=5$, $b=\mathbf{14}$, $c=\mathbf{19}$

b) $a=4$, $b=\mathbf{11}$, $c=\mathbf{15}$

c) $a=3$, $b=\mathbf{8}$, $c=\mathbf{11}$

d) $a=0$, $b=\mathbf{-1}$, $c=\mathbf{-1}$

9. Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{1, 2, 3, \ldots, 57, 58\}$, natomiast działaniem jest mnożenie modulo 59. Dla podanego elementu g tej grupy podać element do niego odwrotny.

a) $g=3$, **20**

b) $g=5$, **12**

c) $g=2$, **30**

d) $g=4$, **15**

10. Niech $E(n)$ będzie liczbą elementów rzędu n w grupie niezerowych liczb zespolonych z mnożeniem. Wówczas.

a) $E(14) = \mathbf{6}$ **b)** $E(55) = \mathbf{40}$

c) $E(21) = \mathbf{12}$ **d)** $E(16) = \mathbf{8}$

11. W urnie znajduje się n kul z kolejnymi liczbami od 1 do n. Trzykrotnie losujemy z urny kulę (losowanie ze zwracaniem). Niech $P(n)$ będzie prawdopodobieństwem, że na wylosowanych kulach pojawiły się trzy różne liczby (czyli za każdym razem wylosowano inną kulę). Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(8) = \mathbf{21/32}$ **b)** $P(5) = \mathbf{12/25}$

c) $P(4) = \mathbf{3/8}$ **d)** $P(6) = \mathbf{5/9}$

12. Zdarzenia losowe A, B i C są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$ i $P(B \cap C)$ podać w postaci ułamka nieskracalnego $P(A \cap B \cap C)$, o ile istnieją niezależne zdarzenia A, B i C spełniające podane warunki. Wpisać **NIE**, jeśli takie zdarzenia nie istnieją.

a) $P(A \cap B) = 1/9$, $P(A \cap C) = 1/16$, $P(B \cap C) = 1/25$,
$P(A \cap B \cap C) = \mathbf{1/60}$

b) $P(A \cap B) = 1/8$, $P(A \cap C) = 1/16$, $P(B \cap C) = 1/32$,
$P(A \cap B \cap C) = \mathbf{1/64}$

c) $P(A \cap B) = 1/3$, $P(A \cap C) = 1/9$, $P(B \cap C) = 1/27$,
$P(A \cap B \cap C) = \mathbf{1/27}$

d) $P(A \cap B) = 1/4$, $P(A \cap C) = 1/9$, $P(B \cap C) = 1/100$,
$P(A \cap B \cap C) =$ **NIE**

1. Niech $f(x)=x^2\cdot\sqrt[3]{x}$. Podać wartości pochodnych podanych rzędów funkcji f w punkcie 1.

a) $f'(1)=\mathbf{7/3}$

b) $f^{(4)}(1)=\mathbf{-56/81}$

c) $f''(1)=\mathbf{28/9}$

d) $f'''(1)=\mathbf{28/27}$

2. Podać w postaci uproszczonej (np. liczby wymierne w postaci ułamka nieskracalnego) kres górny zbioru, gdzie $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$.

a) $\sup\left\{\frac{m}{n}:\ m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 2^m\leqslant 3^n\right\}=\mathbf{\log_2 3}$

b) $\sup\left\{\frac{m}{n}:\ m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 4m^2\leqslant 9n^2\right\}=\mathbf{3/2}$

c) $\sup\left\{\frac{m}{n}:\ m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ m^2\leqslant 2n^2\right\}=\boldsymbol{\sqrt{2}}$

d) $\sup\left\{\frac{m}{n}:\ m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 8^m\leqslant 32^n\right\}=\mathbf{5/3}$

3. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny. Bardzo starannie pisać nawiasy określające przynależność końców do przedziału.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5p}+n^{9p-1}}$, $(\mathbf{1/5},\boldsymbol{\infty})$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3p}+n^{5p-1}}$, $(\mathbf{1/3},\boldsymbol{\infty})$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4p}+n^{9p-1}}$, $(\mathbf{2/9},\boldsymbol{\infty})$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}+n^{5p-1}}$, $(\mathbf{2/5},\boldsymbol{\infty})$

4. Podać wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_0^1 \frac{x^5\,dx}{x^{12}+1} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{24}}$

b) $\int\limits_0^1 \frac{x^4\,dx}{x^{10}+1} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{20}}$

c) $\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{x^{6}+1} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{12}}$

d) $\int\limits_0^1 \frac{x^3\,dx}{x^{8}+1} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{16}}$

5. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x-1-x}{x^2} & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ 1/2 & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$$

Podać wartości pochodnych podanych rzędów funkcji f w zerze.

a) $f^{(4)}(0) = \mathbf{1/30}$

b) $f'''(0) = \mathbf{1/20}$

c) $f^{(8)}(0) = \mathbf{1/90}$

d) $f^{(9)}(0) = \mathbf{1/110}$

6. Dla podanej liczby n podać najmniejszą taką liczbę całkowitą dodatnią k, że

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^k .$$

a) $n = 19, \quad k = \mathbf{5}$

b) $n = 17, \quad k = \mathbf{7}$

c) $n = 29, \quad k = \mathbf{7}$

d) $n = 13, \quad k = \mathbf{11}$

7. Dla podanej macierzy wypisać w kolejności niemalejącej jej rzeczywiste wartości własne (z uwzględnieniem krotności).

a) $\begin{pmatrix} 35 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ **−1, 36** **b)** $\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ **−3, 12**

c) $\begin{pmatrix} 16 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ **−2, 18** **d)** $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ **−4, 9**

8. Dla podanej liczby a wskazać liczby rzeczywiste b, c o następującej własności: Dla każdego układu równań liniowych z trzema niewiadomymi, którego rozwiązaniami są $(1, 2, 3)$ oraz $(2, 5, 7)$, rozwiązaniem tego układu jest także (a, b, c).

a) $a=5$, $b=\mathbf{14}$, $c=\mathbf{19}$

b) $a=4$, $b=\mathbf{11}$, $c=\mathbf{15}$

c) $a=3$, $b=\mathbf{8}$, $c=\mathbf{11}$

d) $a=0$, $b=\mathbf{-1}$, $c=\mathbf{-1}$

9. Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{1, 2, 3, \ldots, 57, 58\}$, natomiast działaniem jest mnożenie modulo 59. Dla podanego elementu g tej grupy podać element do niego odwrotny.

a) $g=5$, **12** **b)** $g=2$, **30**

c) $g=3$, **20** **d)** $g=4$, **15**

10. Niech $E(n)$ będzie liczbą elementów rzędu n w grupie niezerowych liczb zespolonych z mnożeniem. Wówczas.

a) $E(16) = \mathbf{8}$ **b)** $E(14) = \mathbf{6}$

c) $E(55) = \mathbf{40}$ **d)** $E(21) = \mathbf{12}$

11. W urnie znajduje się n kul z kolejnymi liczbami od 1 do n. Trzykrotnie losujemy z urny kulę (losowanie ze zwracaniem). Niech $P(n)$ będzie prawdopodobieństwem, że na wylosowanych kulach pojawiły się trzy różne liczby (czyli za każdym razem wylosowano inną kulę). Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(8) = \mathbf{21/32}$ **b)** $P(6) = \mathbf{5/9}$

c) $P(4) = \mathbf{3/8}$ **d)** $P(5) = \mathbf{12/25}$

12. Zdarzenia losowe A, B i C są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$ i $P(B \cap C)$ podać w postaci ułamka nieskracalnego $P(A \cap B \cap C)$, o ile istnieją niezależne zdarzenia A, B i C spełniające podane warunki. Wpisać **NIE**, jeśli takie zdarzenia nie istnieją.

a) $P(A \cap B) = 1/8$, $P(A \cap C) = 1/16$, $P(B \cap C) = 1/32$,
$P(A \cap B \cap C) = \mathbf{1/64}$

b) $P(A \cap B) = 1/9$, $P(A \cap C) = 1/16$, $P(B \cap C) = 1/25$,
$P(A \cap B \cap C) = \mathbf{1/60}$

c) $P(A \cap B) = 1/4$, $P(A \cap C) = 1/9$, $P(B \cap C) = 1/100$,
$P(A \cap B \cap C) =$ **NIE**

d) $P(A \cap B) = 1/3$, $P(A \cap C) = 1/9$, $P(B \cap C) = 1/27$,
$P(A \cap B \cap C) = \mathbf{1/27}$