

1. Podać kres górny zbioru, gdzie  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ .

a)  $\sup \left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)^n : n \in \mathbb{N} \right\} = \dots\dots\dots$

b)  $\sup \left\{ \left(-\frac{1}{3}\right)^n : n \in \mathbb{N} \right\} = \dots\dots\dots$

c)  $\sup \left\{ \frac{1}{30-n^2} : n \in \mathbb{N} \right\} = \dots\dots\dots$

d)  $\sup \left\{ \frac{1}{30-n^3} : n \in \mathbb{N} \right\} = \dots\dots\dots$

2. Podać sumę szeregu w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( 5^{2^{1/n}} - 5^{2^{1/(n+1)}} \right) = \dots\dots$     b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( 4^{2^{1/n}} - 4^{2^{1/(n+1)}} \right) = \dots\dots$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( 3^{2^{1/n}} - 3^{2^{1/(n+1)}} \right) = \dots\dots$     d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( 2^{2^{1/n}} - 2^{2^{1/(n+1)}} \right) = \dots\dots$

3. Niech  $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}$ . Podać wartości pochodnych podanych rzędów funkcji  $f$  w punkcie 1.

a)  $f'''(1) = \dots\dots\dots$     b)  $f''(1) = \dots\dots\dots$

c)  $f^{(5)}(1) = \dots\dots\dots$     d)  $f^{(4)}(1) = \dots\dots\dots$

4. Podać wartość całki oznaczonej.

a)  $\int_0^1 \frac{x^5 dx}{x^6 + 1} = \dots\dots\dots$     b)  $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{x^3 + 1} = \dots\dots\dots$

c)  $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{x^4 + 1} = \dots\dots\dots$     d)  $\int_0^1 \frac{x^4 dx}{x^5 + 1} = \dots\dots\dots$

5. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Podać wartości pochodnych podanych rzędów funkcji  $f$  w zerze.

a)  $f^{(10)}(0) = \dots\dots\dots$     b)  $f^{(12)}(0) = \dots\dots\dots$

c)  $f^{(11)}(0) = \dots\dots\dots$     d)  $f^{(13)}(0) = \dots\dots\dots$

6. Podać liczbę liczb zespolonych  $z$  spełniających podane równanie.

a)  $1 + z^{40} = 2z^{20}, \dots\dots\dots$     b)  $z^{10} + z^{30} = 2z^{20}, \dots\dots\dots$

c)  $z^{15} + z^{25} = 2z^{20}, \dots\dots\dots$     d)  $z^{12} + z^{28} = 2z^{20}, \dots\dots\dots$

7. Dla podanej macierzy wypisać w kolejności niemalejącej jej wartości własne (z uwzględnieniem krotności).

a)  $\begin{pmatrix} 13 & 6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$  ..... b)  $\begin{pmatrix} 15 & 6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$  .....

c)  $\begin{pmatrix} 37 & 6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$  ..... d)  $\begin{pmatrix} 20 & 6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$  .....

8. Dla podanych liczb  $a$  i  $b$  wskazać liczbę rzeczywistą  $c$  o następującej własności: Dla każdego układu równań liniowych **jednorodnych** z trzema niewiadomymi, którego rozwiązaniami są  $(1, 2, 3)$  oraz  $(2, 5, 7)$ , rozwiązaniem tego układu jest także  $(a, b, c)$ .

a)  $a = 4, \quad b = 7, \quad c = \dots\dots\dots$

b)  $a = 3, \quad b = 4, \quad c = \dots\dots\dots$

c)  $a = 2, \quad b = 7, \quad c = \dots\dots\dots$

d)  $a = 1, \quad b = 3, \quad c = \dots\dots\dots$

9. Zbiorem elementów grupy jest zbiór liczb rzeczywistych, a działanie grupowe "o" jest określone wzorem  $x \circ y = x + y + 3$ . Dla podanego elementu  $g$  tej grupy podać element do niego odwrotny.

a)  $g = 4, \quad g^{-1} = \dots\dots\dots$  b)  $g = 2, \quad g^{-1} = \dots\dots\dots$

c)  $g = 1, \quad g^{-1} = \dots\dots\dots$  d)  $g = 3, \quad g^{-1} = \dots\dots\dots$

**10.** Dla podanej liczby  $n$  podać liczbę elementów rzędu 3 w grupie izometrii  $n$ -kąta foremnego.

a)  $n = 30$ , ..... b)  $n = 27$ , .....

c)  $n = 15$ , ..... d)  $n = 20$ , .....

**11.** Dane są dwie urny. W pierwszej urnie znajduje się pięć kul: dwie białe i trzy czarne. W drugiej urnie jest jedna kula biała i  $c$  kul czarnych. Losujemy kulę z drugiej urny i wrzucamy ją do pierwszej urny. Następnie z pierwszej urny losujemy jedną kulę. Niech  $P(c)$  będzie prawdopodobieństwem, że jest to kula biała. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a)  $P(6) =$  ..... b)  $P(3) =$  .....

c)  $P(4) =$  ..... d)  $P(5) =$  .....

**12.** Rzucamy dwa razy kostką do gry. Niech  $P(n)$  oznacza prawdopodobieństwo, że suma liczb oczek wyrzuconych w obu rzutach jest podzielna przez  $n$ . Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a)  $P(5) =$  ..... b)  $P(6) =$  .....

c)  $P(7) =$  ..... d)  $P(4) =$  .....