

EGZAMIN MAGISTERSKI, 10.02.2021r
Matematyka aktuarialno-finansowa

Zadanie **1.** (8 punktów)

Rozpatrujemy portfel n polis dla 30-latków na całe życie, płatnych w chwili śmierci. Każda polisa jest wystawiona na sumę ubezpieczenia S PLN. Jaki musi być zabezpieczony fundusz X w chwili 0, aby z prawdopodobieństwem $1 - \alpha$ były możliwe wypłaty wszystkich polis? Znajdź X przyjmując, że przyszłe czasy trwania życia 30-latków są niezależne i o tym samym rozkładzie, $\bar{A}_{30} = B$, ${}^2\bar{A}_{30} = C$ oraz $\Phi(M) = 1 - \alpha$, gdzie $\Phi(\cdot)$ jest dystrybuantą rozkładu normalnego.

Zadanie **2.** (8 punktów)

Dany jest ciąg X_1, \dots, X_{100} niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie. Rozkład X_i jest taki sam jak rozkład $aN_1 + bN_2$, gdzie N_1 i N_2 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Poissona z średnią $\frac{1}{2a}$ i $\frac{1}{2b}$. Korzystając z centralnego twierdzenia granicznego podać warunek na a, b aby w przybliżeniu

$$\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_{100} > 110) \approx 0.9.$$

Wiadomo, że dla standardowego rozkładu normalnego kwantyl $q_{0.9} = 1.28$

Zadanie **3.** (8 punktów)

O pewnym rynku finansowym wiemy, że:

Na rynku są akcje spółki WarzywaXXI [W21], które nie wypłacają dywidendy. Obligacja zerokuponowa wypłacająca 1000 zł za rok kosztuje dziś 950 zł. Prawo do kupna 1 akcji W21 za rok po cenie 100 zł jest dziś warte 30 zł. Prawo do sprzedaży 1 akcji W21 za rok po cenie 100 zł jest dziś warte 5 zł. Wszystkie umowy są dotrzymywane.

Inwestor A umawia się z inwestorem B, że za rok A kupi od B 1 akcję W21 za cenę F zł - kwotę dziś ustaloną.

Ile powinno wynieść F , aby nie wprowadzić arbitrażu?

Zadanie **4.** (8 punktów)

Niech B_t będzie ruchem Browna oraz

$$Y_t = \int_0^t dB_s$$

Oblicz EY_t , EY_t^2 i $P(Y_s < 0, Y_{2s} > 0)$.