EGZAMIN LICENCJACKI (zadania otwarte)
16 września 2020 r.

Zadanie **1.** Rozstrzygnąć, czy funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\sqrt{\sqrt{x^2+1}-1}$$

jest różniczkowalna w zerze.

Zadanie **2.** Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

albo wykazać, że ta granica nie istnieje.

Zadanie **3.** Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$x'(t)=y(t), \qquad y'(t)=-4x(t), \qquad x(0)=0, \qquad y(0)=2.$$

Zadanie **4.** Rozstrzygnąć, czy istnieje taka macierz A rozmiaru 3×3 o współczynnikach rzeczywistych, że

$$A\neq\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix} \qquad \text{oraz} \qquad A^3=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Zadanie **5.** Wyznaczyć liczbę elementów rzędu 2 w grupie permutacji S_6.

Zadanie **6.** Dysponujemy trzema zewnętrznie nierozróżnialnymi monetami, o których wiemy, że dwie są prawdziwe (prawdopodobieństwo wyrzucenia orła równe 1/2), a trzecia fałszywa (prawdopodobieństwo wyrzucenia orła równe 1/3). Wybraliśmy losowo jedną z tych trzech monet, a następnie wykonaliśmy nią 12 rzutów. Okazało się, że wypadły 4 orły.

Co jest bardziej prawdopodobne: to że wylosowana moneta jest prawdziwa, czy że jest fałszywa?

Wskazówka: W rozwiązaniu można skorzystać z zamieszczonej obok tabeli potęg dwójki i trójki mniejszych od miliona.

n	2^n	3^n
1	2	3
2	4	9
3	8	27
4	16	81
5	32	243
6	64	729
7	128	2187
8	256	6561
9	512	19683
10	1024	59049
11	2048	177147
12	4096	531441
13	8192	
14	16384	
15	32768	
16	65536	
17	131072	
18	262144	
19	524288	