EGZAMIN MAGISTERSKI, 11.09.2020r
Nauczycielska

Zadanie **1. (8 punktów)**

Dany jest prostokątny trójkąt równoramienny ABC, przy czym $CA = CB$ i kąt ACB jest prosty. Na boku CB leży punkt E a na przedłużeniu boku AC leży punkt M, przy czym $CE = CM$. Z punktu C prowadzimy prostą prostopadłą do prostej AE, która przecina bok AB w punkcie L. Udowodnić, że trójkąty ACE i BCM są przystające oraz że proste CL i MB są równoległe.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Udowodnić, że dla dowolnego naturalnego n liczba $5^{2n+1}+1$ jest podzielna przez 6.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech $X_1, X_2, ..., X_n$ będzie próbą losową z rozkładu jednostajnego na przedziale $[\alpha, \beta]$. Wyznacz metodą momentów estymatory nieznanych parametrów α i β.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Dany jest trójkąt równoramienny ABC, przy czym $AB = AC$. Środek S_1 okręgu wpisanego i środek S_2 okręgu opisanego są do siebie symetryczne względem boku BC, a punkt S_0 jest punktem przecięcia prostych BC i S_1S_2. Niech α będzie miarą kąta BAC, β miarą kąta ABC, γ miarą kąta środkowego BS_2C. Udowodnić, że $\gamma = 2\pi - 2\alpha$, $\beta + \gamma = \pi$ oraz wyliczyć α.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 11.09.2020r
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

Zadanie **1. (8 punktów)**

Jeśli zmienna losowa Y wyraża wartość szkody, to zmienna $I_d(Y) = (Y-d)_+$ wyraża nadwyżkę szkody ponad d. Załóżmy, że Y ma rozkład dyskretny określony na liczbach naturalnych. Jeśli w dodatku ograniczymy zainteresowanie do zmiennych $I_d(Y)$ o wartościach $d = 0, 1, 2, 3, \ldots$, to pokaż, że

$$E[I_{d+1}(Y)] = E[I_d(Y)] - P(Y > d).$$

Zadanie **2. (8 punktów)**

W populacji $\mathcal{P}$ spełniona jest hipoteza jednorodnej populacji. Ponadto dystrybuanta rozkładu przyszłego czasu życia *dziesięciolatka* dana jest wzorem $F_{10}(t) = \frac{t}{70}\mathbb{1}_{[0,70]}(t)$.

Dwudziestolatek z populacji $\mathcal{P}$ podpisał umowę z firmą ubezpieczeniową w ramach której z chwilą rozpoczęcia umowy płaci jednorazowo składkę netto X. Umowa gwarantuje wypłatę kwoty A na koniec pierwszego roku jeśli przeżyje rok oraz wypłatę B na koniec drugiego roku jeśli przeżyje dwa lata. Przewiduje się, że czynnik dyskonta w pierwszym roku będzie równy v_1 natomiast w drugim roku v_2. Znajdź X.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech $X_1, X_2, ..., X_n$ będzie próbą losową z rozkładu jednostajnego na przedziale $[\alpha, \beta]$. Wyznacz metodą momentów estymatory nieznanych parametrów α i β.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Pokazać, że każda funkcja holomorficzna w pewnym obszarze D, o wartościach czysto rzeczywistych, musi być w tym obszarze stała.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Powiemy, że $x \in X$ jest *punktem izolowanym*, jeżeli $\{x\}$ jest zbiorem otwartym.

- Podaj przykład nieskończonej przestrzeni, w której wszystkie punkty są izolowane (lub pokaż, że taka nie istnieje).
- Podaj przykład nieskończonej przestrzeni, która ma dokładnie dwa punkty izolowane.
- Podaj przykład nieskończonej przestrzeni, która ma dokładnie dwa punkty, które nie są izolowane.
- Pokaż, że jeżeli (X, d) ma dokładnie dwa punkty izolowane, a (Y, d') jest homeomorficzna z (X, d), to (Y, d') też ma dokładnie dwa punkty izolowane.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 11.09.2020r
Nauczycielska

Zadanie **1. (8 punktów)**

Dany jest prostokątny trójkąt równoramienny ABC, przy czym $CA = CB$ i kąt ACB jest prosty. Na boku CB leży punkt E a na przedłużeniu boku AC leży punkt M, przy czym $CE = CM$. Z punktu C prowadzimy prostą prostopadłą do prostej AE, która przecina bok AB w punkcie L. Udowodnić, że trójkąty ACE i BCM są przystające oraz że proste CL i MB są równoległe.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Udowodnić, że dla dowolnego naturalnego n liczba $5^{2n+1}+1$ jest podzielna przez 6.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech $X_1, X_2, ..., X_n$ będzie próbą losową z rozkładu jednostajnego na przedziale $[\alpha, \beta]$. Wyznacz metodą momentów estymatory nieznanych parametrów α i β.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Pokazać, że każda funkcja holomorficzna w pewnym obszarze D, o wartościach czysto rzeczywistych, musi być w tym obszarze stała.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Powiemy, że $x \in X$ jest *punktem izolowanym*, jeżeli $\{x\}$ jest zbiorem otwartym.

- Podaj przykład nieskończonej przestrzeni, w której wszystkie punkty są izolowane (lub pokaż, że taka nie istnieje).
- Podaj przykład nieskończonej przestrzeni, która ma dokładnie dwa punkty izolowane.

- Podaj przykład nieskończonej przestrzeni, która ma dokładnie dwa punkty, które nie są izolowane.
- Pokaż, że jeżeli (X, d) ma dokładnie dwa punkty izolowane, a (Y, d') jest homeomorficzna z (X, d), to (Y, d') też ma dokładnie dwa punkty izolowane.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 11.09.2020r
Zastosowania

Zadanie **1. (8 punktów)**

Niech (X, Y) będzie wektorem losowym z wektorem średniej $(2, 1)$ i macierzą kowariancji

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

oraz $Z = X + 2Y$. Ciąg $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{100}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie jak Z. Oszacować

$$\mathbb{P}(Z_1 + \ldots + Z_{100} \in (400 - 10\sqrt{8}, 400 + 10\sqrt{8})).$$

Zadanie **2. (8 punktów)**

Załóżmy, że $(N_t)_{t \geq 0}$ jest procesem Poissona z parametrem λ. Znajdź rozkład warunkowy N_s pod warunkiem $N_t = n$ dla $s < t$ oraz dla $s > t$.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbą losową z rozkładu o gęstości $f(x; \theta) = 1/\theta$ dla $x \in [0, \theta]$. Wyznacz estymator największej wiarogodności $\hat{\theta}_n$ parametru θ oraz stałą c, tak aby $E(c\,\hat{\theta}_n) = \theta$.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Pokazać, że każda funkcja holomorficzna w pewnym obszarze D, o wartościach czysto rzeczywistych, musi być w tym obszarze stała.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Powiemy, że $x \in X$ jest *punktem izolowanym*, jeżeli $\{x\}$ jest zbiorem otwartym.

- Podaj przykład nieskończonej przestrzeni, w której wszystkie punkty są izolowane (lub pokaż, że taka nie istnieje).
- Podaj przykład nieskończonej przestrzeni, która ma dokładnie dwa punkty izolowane.

- Podaj przykład nieskończonej przestrzeni, która ma dokładnie dwa punkty, które nie są izolowane.
- Pokaż, że jeżeli (X, d) ma dokładnie dwa punkty izolowane, a (Y, d') jest homeomorficzna z (X, d), to (Y, d') też ma dokładnie dwa punkty izolowane.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 11.09.2020r
Matematyka teoretyczna

Zadanie **1. (8 punktów)**

(a) (2pkt) Udowodnić, że każda grupa, której rząd jest liczbą pierwszą, jest cykliczna.

(b) (3pkt) Udowodnić, że każda grupa rzędu pq, gdzie p i q są różnymi liczbami pierwszymi, posiada właściwy dzielnik normalny.

(c) (3pkt) Wywnioskować z (a) i (b), że każda grupa rzędu pq, gdzie p i q są różnymi liczbami pierwszymi, jest rozwiązalna.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Udowodnij, że kontrakcja zwartej przestrzeni metrycznej ma punkt stały. (Kontrakcja przestrzeni metrycznej (X, d) to przekształcenie $f\colon X \to X$, które dla każdych dwóch różnych argumentów $x, y \in X$ spełnia $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$. Punkt stały f to takie x, dla którego zachodzi $f(x) = x$.)

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem o wyrazach przyjmujących jedynie wartości ze zbioru $\{-1, 0, 1\}$.

(a) Uzasadnij, tożsamość

$$\varepsilon_1\sqrt{2+\varepsilon_2\sqrt{2+\ldots+\varepsilon_n\sqrt{2}}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n}{2^{k-1}}\right); \quad n \in \mathbb{N}.$$

(b) Następnie pokaż zbieżność ciągu

$$a_n = \varepsilon_1\sqrt{2+\varepsilon_2\sqrt{2+\ldots+\varepsilon_n\sqrt{2}}}.$$

Zadanie **4. (8 punktów)**

Pokazać, że każda funkcja holomorficzna w pewnym obszarze D, o wartościach czysto rzeczywistych, musi być w tym obszarze stała.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Powiemy, że $x \in X$ jest *punktem izolowanym*, jeżeli $\{x\}$ jest zbiorem otwartym.

- Podaj przykład nieskończonej przestrzeni, w której wszystkie punkty są izolowane (lub pokaż, że taka nie istnieje).
- Podaj przykład nieskończonej przestrzeni, która ma dokładnie dwa punkty izolowane.
- Podaj przykład nieskończonej przestrzeni, która ma dokładnie dwa punkty, które nie są izolowane.
- Pokaż, że jeżeli (X, d) ma dokładnie dwa punkty izolowane, a (Y, d') jest homeomorficzna z (X, d), to (Y, d') też ma dokładnie dwa punkty izolowane.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 11.09.2020r
Analiza danych

Zadanie **1. (8 punktów)**
Sformułuj lemat Borela-Cantelliego i udowodnij jedną z jego tez.

Zadanie **2. (8 punktów)**
Rozważamy problem testowania zbioru m hipotez $\{(H_0^1, H_1^1), \ldots, (H_0^m, H_1^m)\}$. Jaka jest zależność pomiędzy $FWER$ i FDR? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie **3. (8 punktów)**
Niech $X_1, X_2, ..., X_n$ będzie próbą losową z rozkładu jednostajnego na przedziale $[\alpha, \beta]$. Wyznacz metodą momentów estymatory nieznanych parametrów α i β.

Zadanie **4. (8 punktów)**
Pokazać, że każda funkcja holomorficzna w pewnym obszarze D, o wartościach czysto rzeczywistych, musi być w tym obszarze stała.

Zadanie **5. (8 punktów)**
Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Powiemy, że $x \in X$ jest *punktem izolowanym*, jeżeli $\{x\}$ jest zbiorem otwartym.

- Podaj przykład nieskończonej przestrzeni, w której wszystkie punkty są izolowane (lub pokaż, że taka nie istnieje).
- Podaj przykład nieskończonej przestrzeni, która ma dokładnie dwa punkty izolowane.
- Podaj przykład nieskończonej przestrzeni, która ma dokładnie dwa punkty, które nie są izolowane.
- Pokaż, że jeżeli (X, d) ma dokładnie dwa punkty izolowane, a (Y, d') jest homeomorficzna z (X, d), to (Y, d') też ma dokładnie dwa punkty izolowane.