

EGZAMIN LICENCJACKI (zadania otwarte)
29 czerwca 2020 r.

Zadanie 1. Wyznaczyć najmniejszą wartość wyrażenia $x^4 + y^4 + xy$, gdzie x, y przebiegają zbiór liczb rzeczywistych.

Zadanie 2. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^x}\right)^{(x+1)^x}.$$

Zadanie 3. Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$x'(t) = y(t), \quad y'(t) = 2x(t) + y(t), \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 2.$$

Zadanie 4. Rozstrzygnąć, czy istnieją takie macierze A i B rozmiaru 3×3 o współczynnikach rzeczywistych, że macierz AB ma wartości własne 5, 6 i 12, a macierz BA ma wartości własne 4, 9 i 10.

Zadanie 5. Podać przykład grupy abelowej, w której jest dokładnie 7 elementów rzędu 2.

Zadanie 6. W teleturnieju zawodnik odpowiada na pytanie, do którego podane są 4 warianty odpowiedzi (1 poprawny i 3 błędne — zawodnik ma wybrać z tych 4 wariantów odpowiedź poprawną). Zawodnik nie ma błędnego pojęcia, jaka jest poprawna odpowiedź i dlatego wszystkie 4 warianty uważa za jednakowo prawdopodobne.

Zawodnik używa koła ratunkowego w postaci jokera, który działa następująco: Zawodnik wskazuje 2 warianty odpowiedzi, a joker usuwa spośród tych dwóch wariantów odpowiedź niepoprawną (jeśli oba wskazane warianty są błędne, joker usuwa losowo wybraną z tych dwóch odpowiedzi).

Po użyciu jokera zawodnik został z trzema wariantami odpowiedzi. Czy te trzy warianty są jednakowo prawdopodobne? Jeśli nie, to jakie są prawdopodobieństwa poprawności poszczególnych wariantów?